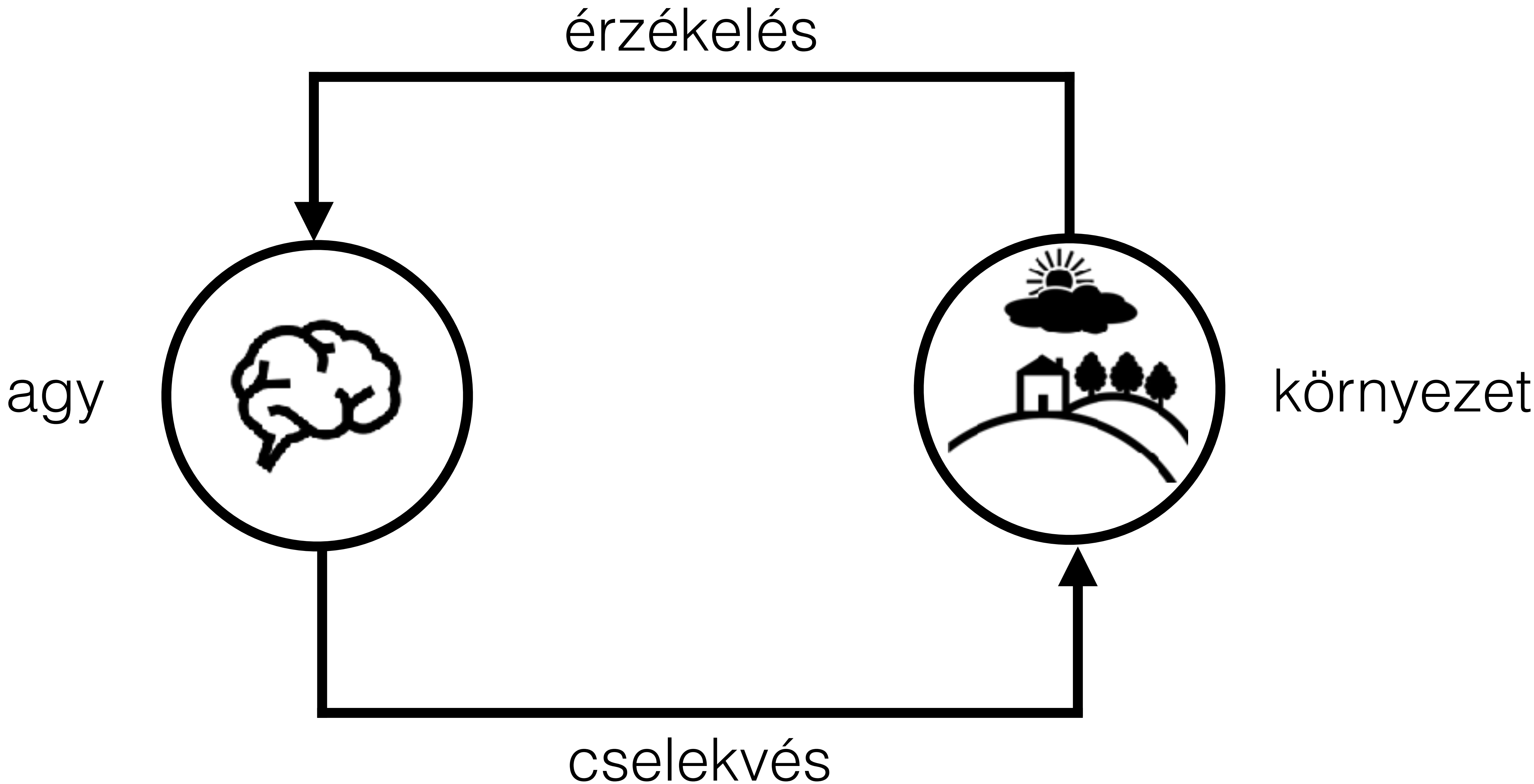
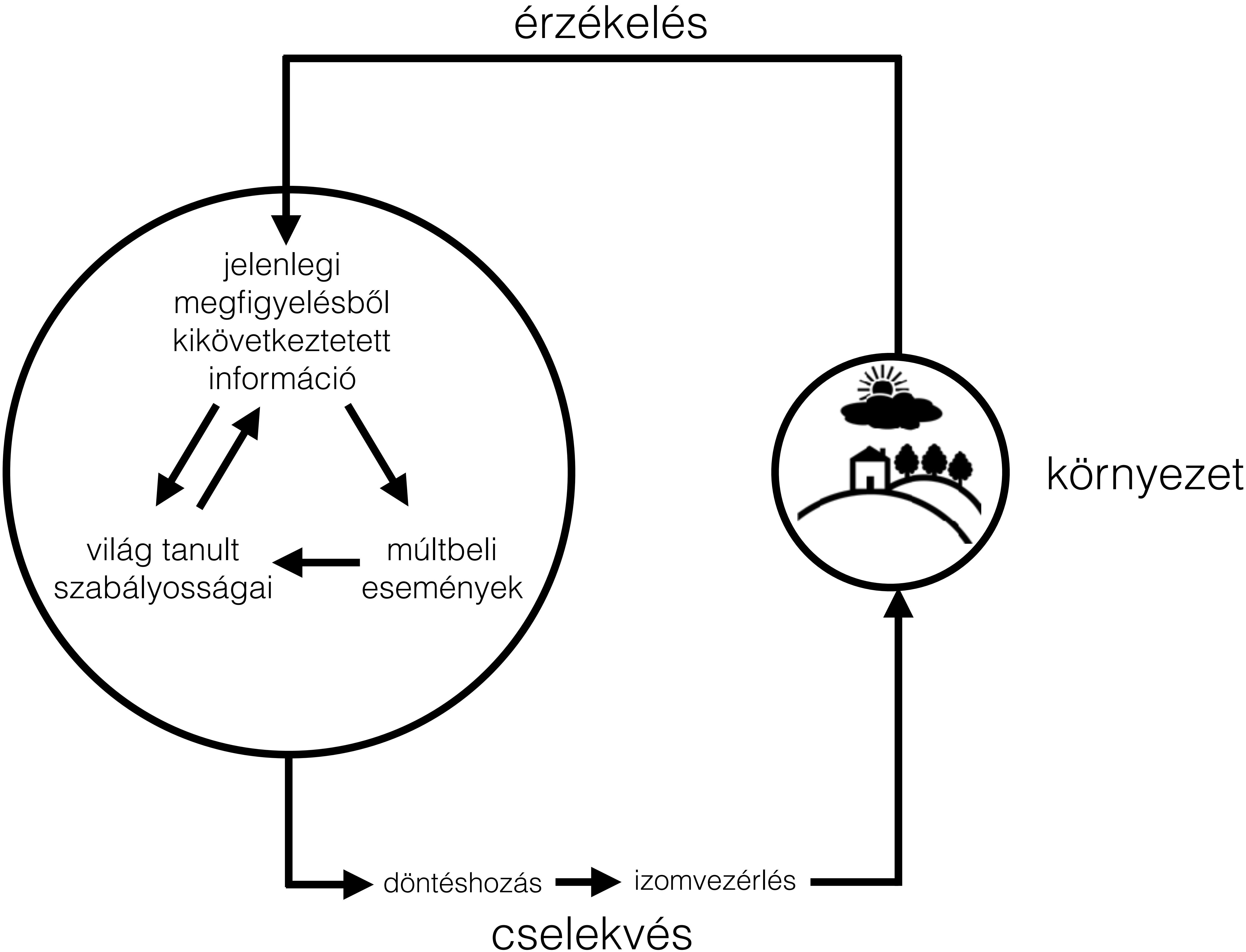
Statisztikus tanulás az idegrendszerben

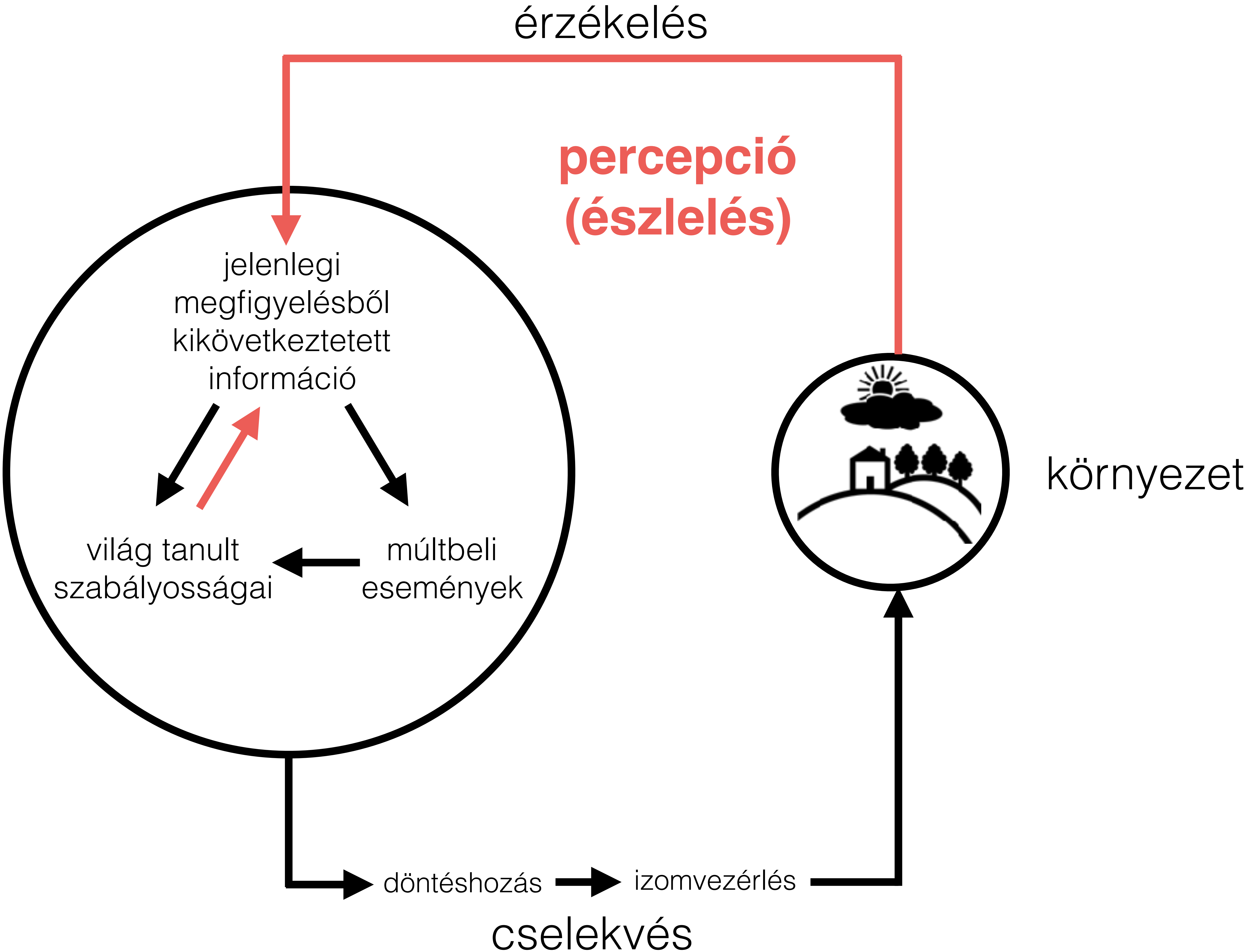
ORBÁN GERGŐ

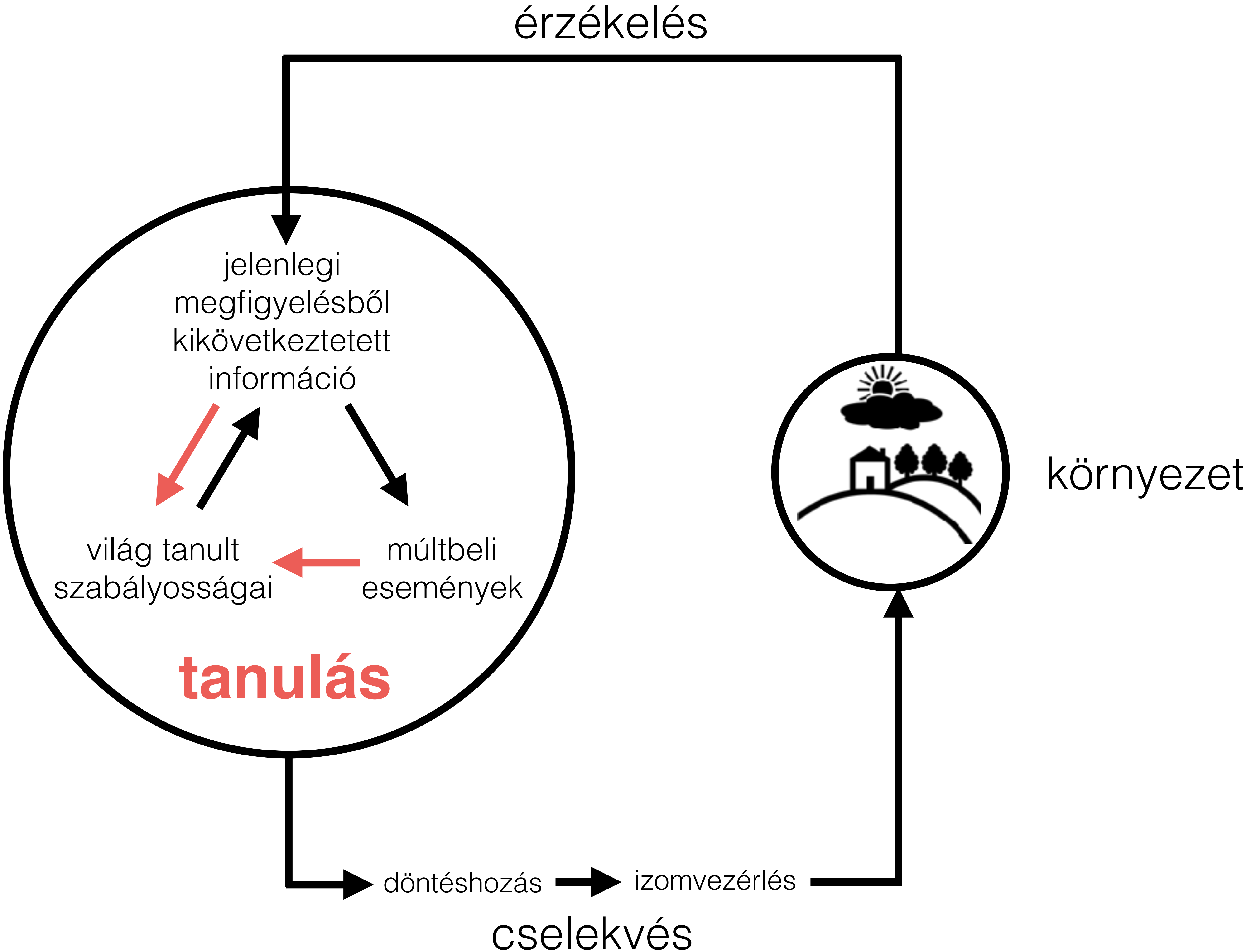
golab.wigner.mta.hu

WIGNER RESEARCH CENTRE FOR PHYSICS

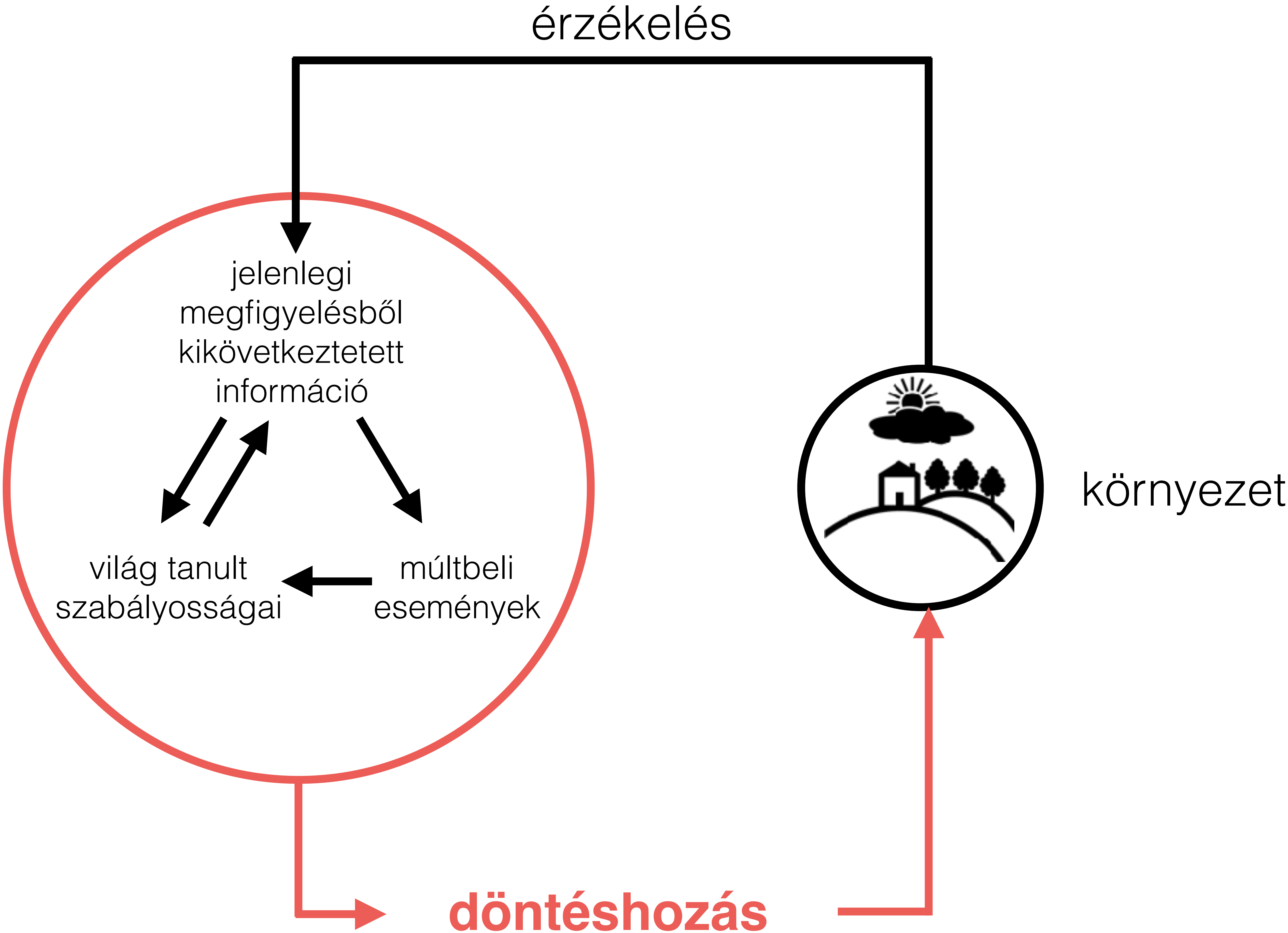

érzékelés
agy
környezet
cselekvés


érzékelés
jelenlegi megfigyelésből kikövetkeztetett információ
világ tanult szabályosságai
múltbeli események
környezet
döntéshozás
izomvezérlés
cselekvés


érzékelés
percepció
(észlelés)
jelenlegi
megfigyelésből
kikövetkeztetett
információ
világ tanult
szabályosságai
múltbeli
események
környezet
döntéshozás
izomvezérlés
cselekvés



érzékelés
jelenlegi megfigyelésből kikövetkeztetett információ
világ tanult szabályosságai
múltbeli események
tanulás
környezet
döntéshozás
izomvezérlés
cselekvés



érzékelés
jelenlegi megfigyelésből kikövetkeztetett információ
világ tanult szabályosságai
múltbeli események
környezet
döntéshozás

Introduction

Knowledge representation

Probabilistic models

Bayesian behaviour

Approximate inference I (computer lab)

Vision I

Approximate inference II: Sampling

Measuring priors

Neural representation of probabilities

Structure learning

Vision II

Decision making and reinforcement learning elméleti

- Introduction
- Knowledge representation
- Probabilistic models
- Bayesian behaviour
- Approximate inference I (computer lab)
- Vision I
- Approximate inference II: Sampling
- Measuring priors
- Neural representation of probabilities
- Structure learning
- Vision II
- Decision making and reinforcement learning

Introduction

Knowledge representation

Probabilistic models

Bayesian behaviour

Approximate inference I (computer lab)

Vision I

Approximate inference II: Sampling

Measuring priors

Neural representation of probabilities

Structure learning

Vision II

Decision making and reinforcement learning

elméleti

kognitív

Introduction

Knowledge representation

Probabilistic models

Bayesian behaviour

Approximate inference I (computer lab)

Vision I

Approximate inference II: Sampling

Measuring priors

Neural representation of probabilities

Structure learning

Vision II

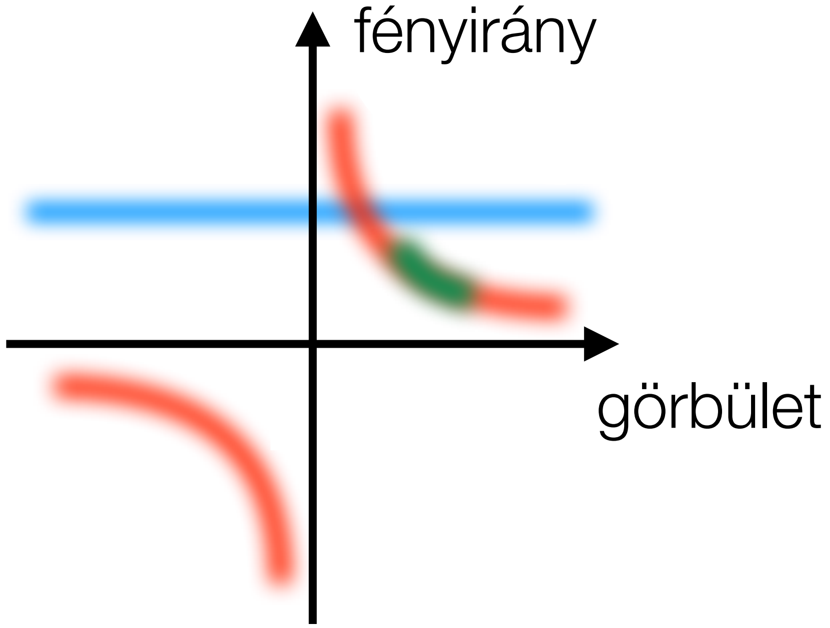
Decision making and reinforcement learning

elméleti

kognitív

neurális

RECAP: role of priors



$$P(\text{feature} \,|\, \text{stimulus}) \propto P(\text{stimulus} \,|\, \text{feature}) \times P(\text{feature})$$

posterior: inference

likelihood: evidence

prior : expectations

features $\rightsquigarrow$ neurons

Bayes inferencia

Miért érdekes a poszterior eloszlás?

Bayes inferencia

Miért érdekes a poszterior eloszlás?

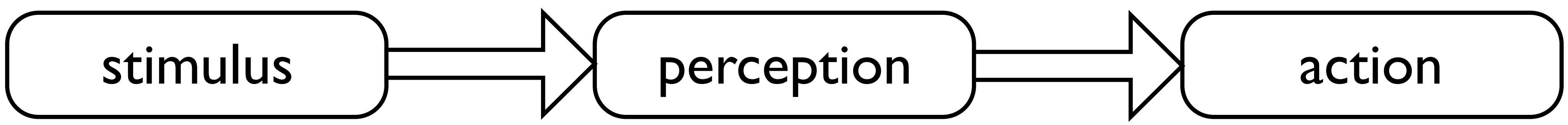
stimulus

perception

action

Bayes inferencia

Miért érdekes a poszterior eloszlás?



Bayes inference

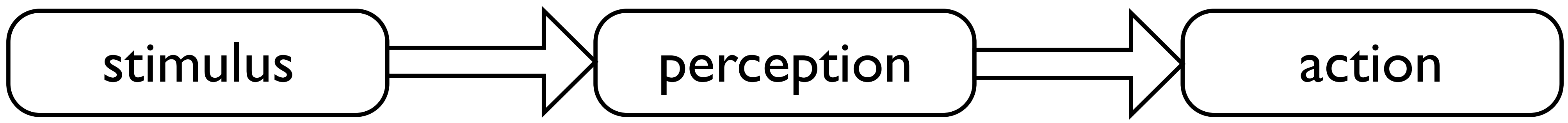
Miért érdekes a poszterior eloszlás?

inference

$$\mathrm{P}\left(\mathbf{z}\,|\,\mathbf{x}\right) \propto \mathrm{P}\left(\mathbf{x}\,|\,\mathbf{z}\right)\mathrm{P}\left(\mathbf{z}\right)$$

Bayes inferencia

Miért érdekes a poszterior eloszlás?



inference

$$\mathrm{P}\left(\mathbf{z} \,|\, \mathbf{x}\right) \propto \mathrm{P}\left(\mathbf{x} \,|\, \mathbf{z}\right) \mathrm{P}\left(\mathbf{z}\right)$$

decision making

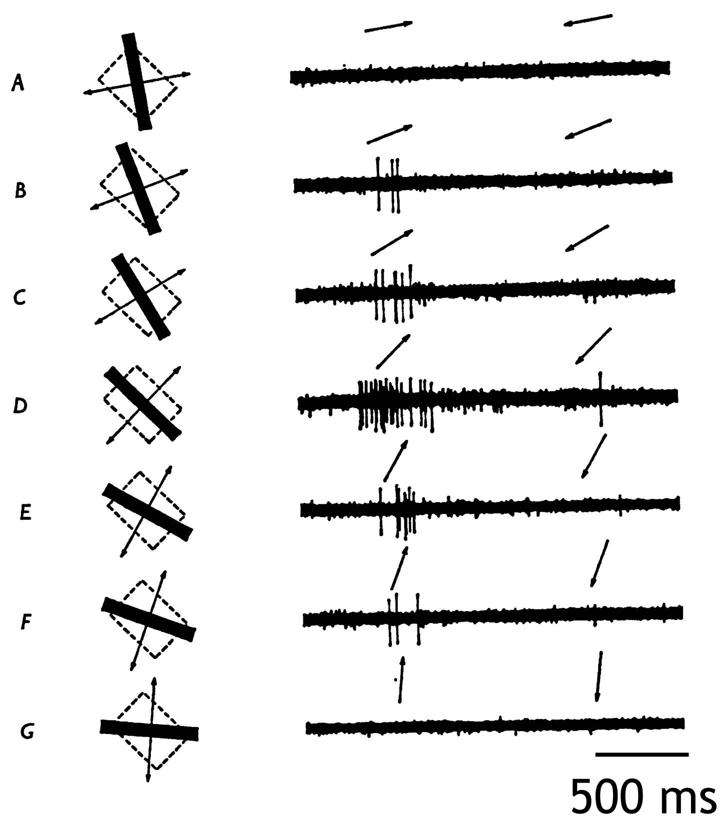
$$R(a) = \int dz\, U(z,a)\, \mathrm{P}(\mathbf{z} \,|\, \mathbf{x})$$

Neurális válaszok

Neurális válaszok

Neurális válaszok

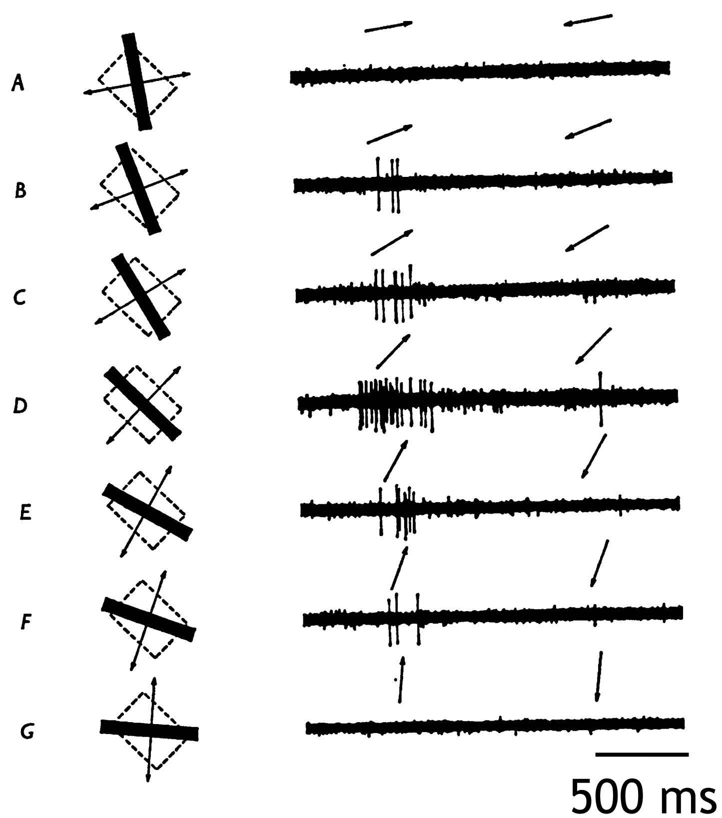
V1 characteristic response



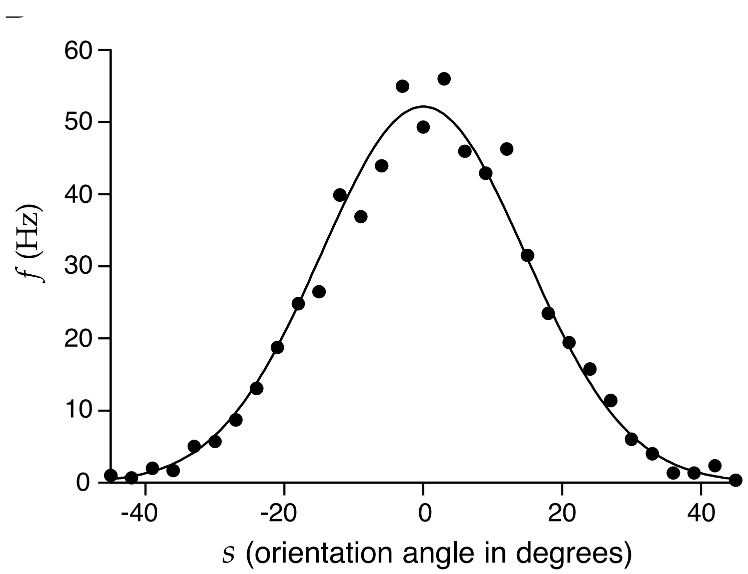
Hubel & Wiesel, J Physiol 1968

Neurális válaszok

V1 characteristic response

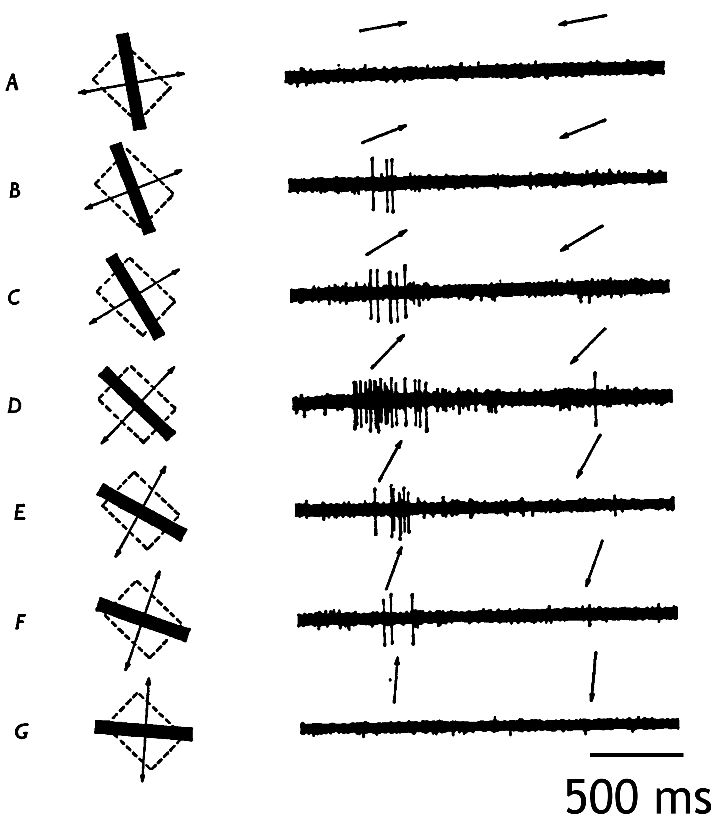


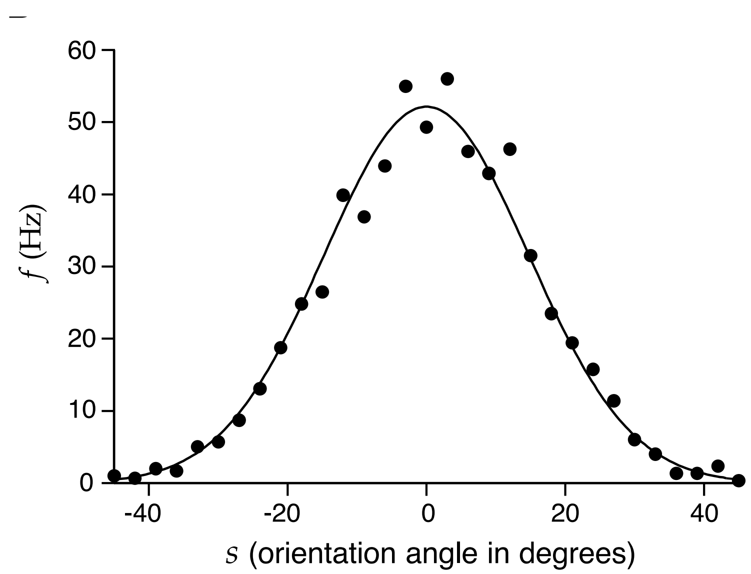
Hubel & Wiesel, J Physiol 1968



Neurális válaszok

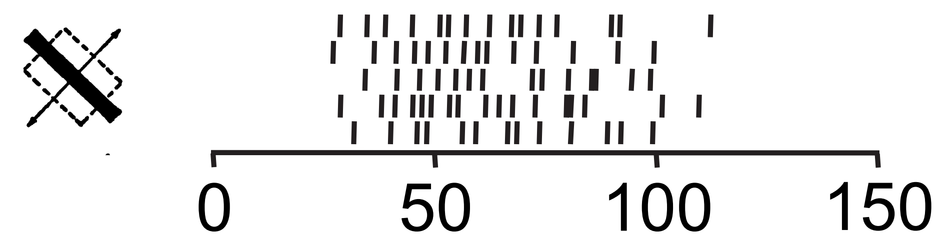
V1 characteristic response





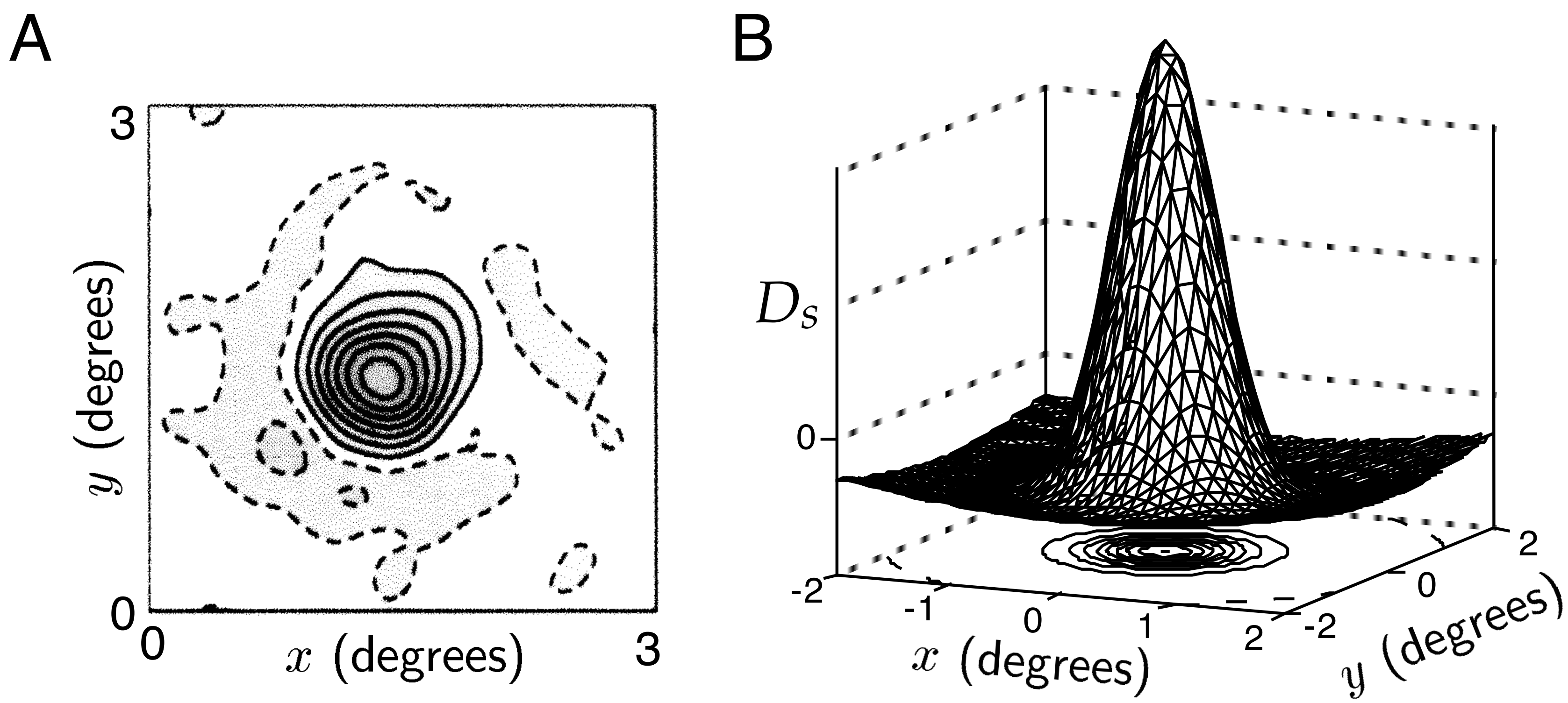
Hubel & Wiesel, J Physiol 1968

V1 spike train variability

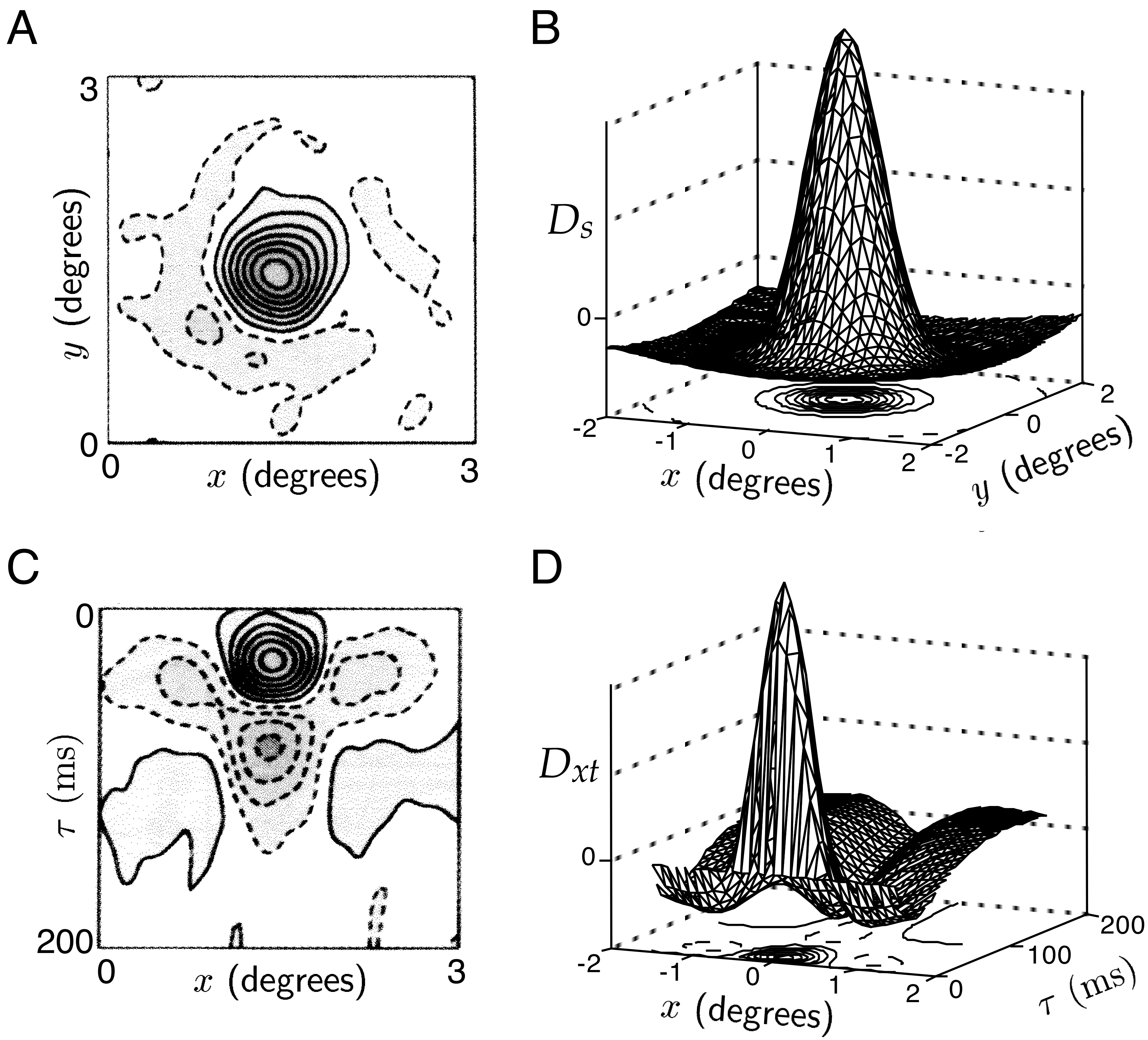


Gur & Snodderly, Cereb Cortex 2006

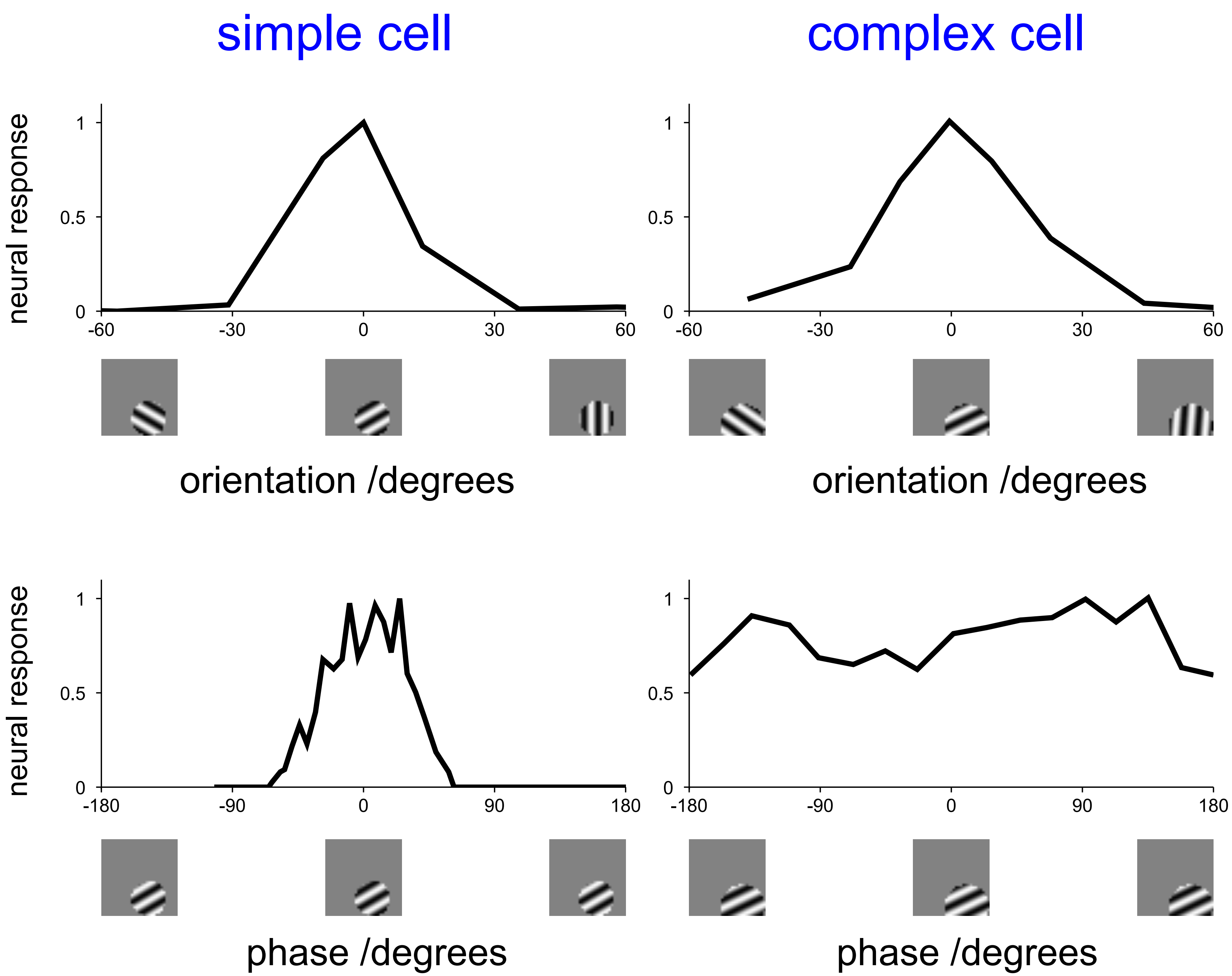
Receptív mező



Receptív mező

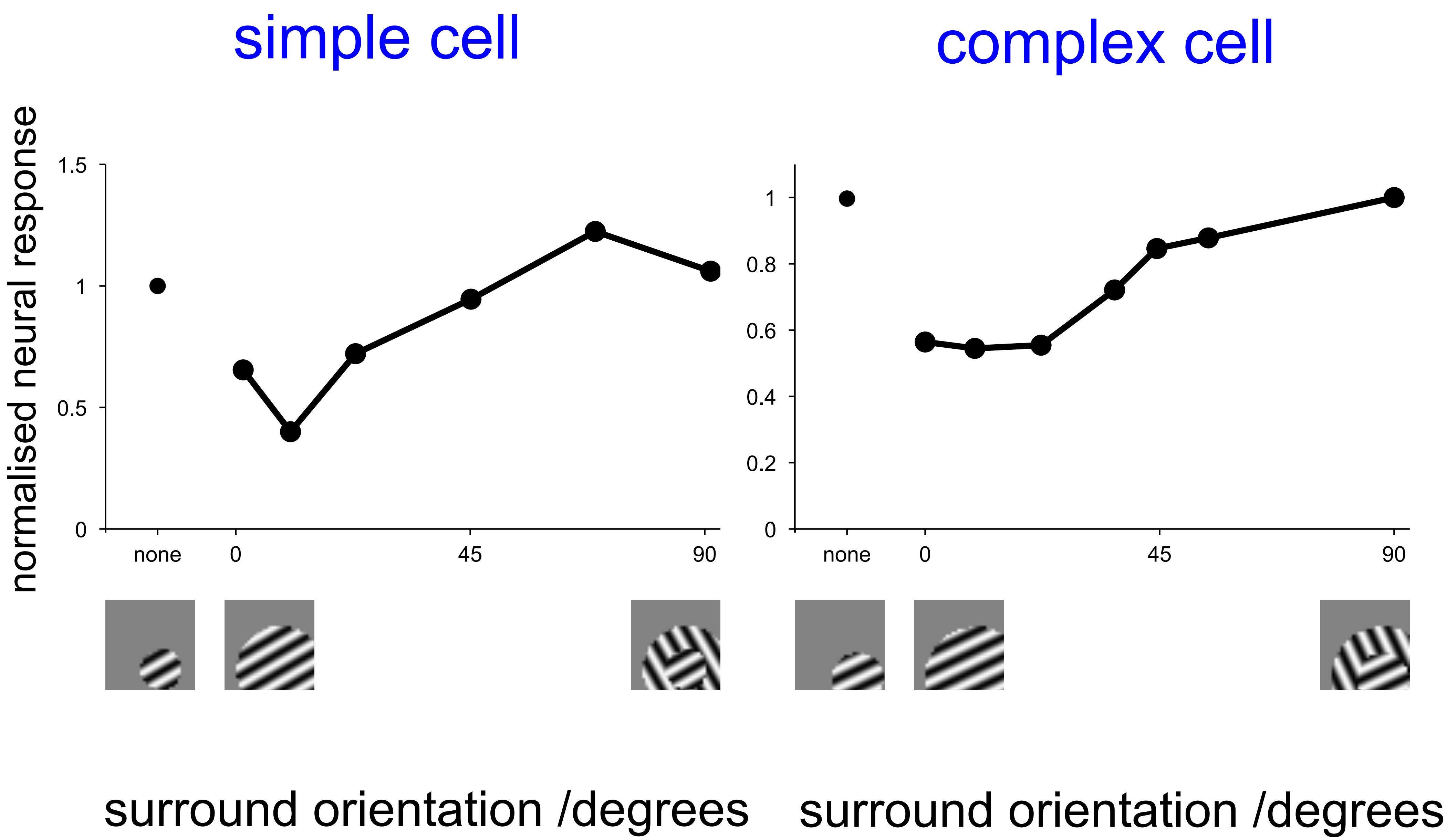


Receptív mező tulajdonságok



Movshon et al. 1978a, 1978b and Jones et al. 2001

Receptív mező tulajdonságok



Unsupervised learning

Input: $x_1, x_2, \ldots, x_t$ összefoglaló néven: adat - vizuális, auditoros, szöveg

Gól: $\mathrm{P}\left(\mathbf{x}\right)$

Unsupervised learning

Input: $x_1, x_2, \ldots, x_t$ összefoglaló néven: adat - vizuális, auditoros, szöveg

Gól: $\mathrm{P}\left(\mathbf{x}\right)$

(Supervised learning:

Input: $\{x_1, y_1\}, \{x_2, y_2\}, \ldots, \{x_t, y_t\}$

Gól: $\mathrm{P}\left(\mathbf{x} \,|\, \mathbf{y}\right)$)

Unsupervised learning

Input: $x_1, x_2, \ldots, x_t$ összefoglaló néven: adat - vizuális, auditoros, szöveg

Gól: $\mathrm{P}\left(\mathbf{x}\right)$

(Supervised learning:

Input: $\{x_1, y_1\}, \{x_2, y_2\}, \ldots, \{x_t, y_t\}$

Gól: $\mathrm{P}\left(\mathbf{x} \,|\, \mathbf{y}\right)$)

$\mathrm{P}\left(\mathbf{x}\right)$ Bonyolult!

Miért is?

Unsupervised learning

Input: $x_1, x_2, \ldots, x_t$ összefoglaló néven: adat - vizuális, auditoros, szöveg

Gól: $\mathrm{P}\left(\mathbf{x}\right)$

(Supervised learning:

Input: $\{x_1, y_1\}, \{x_2, y_2\}, \ldots, \{x_t, y_t\}$

Gól: $\mathrm{P}\left(\mathbf{x} \,|\, \mathbf{y}\right)$)

$\mathrm{P}\left(\mathbf{x}\right)$ Bonyolult!

Miért is?

Egyszerűsítés: $\mathrm{P}\left(\mathbf{x}\right) = \mathrm{P}\left(\mathbf{x} \,|\, \mathbf{z}\right) \mathrm{P}\left(\mathbf{z}\right)$

Unsupervised learning

Input: $x_1, x_2, \ldots, x_t$ összefoglaló néven: adat - vizuális, auditoros, szöveg

Gól: $\mathrm{P}\left(\mathbf{x}\right)$

(Supervised learning:

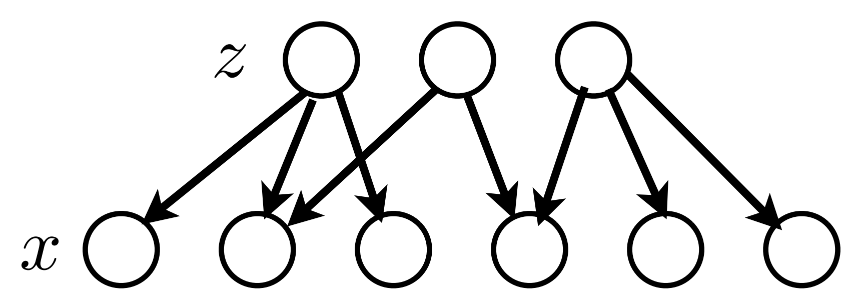
Input: $\{x_1, y_1\}, \{x_2, y_2\}, \ldots, \{x_t, y_t\}$

Gól: $\mathrm{P}\left(\mathbf{x} \,|\, \mathbf{y}\right)$)

$\mathrm{P}\left(\mathbf{x}\right)$ Bonyolult!

Miért is?

Egyszerűsítés: $\mathrm{P}\left(\mathbf{x}\right) = \mathrm{P}\left(\mathbf{x} \,|\, \mathbf{z}\right) \mathrm{P}\left(\mathbf{z}\right)$



Unsupervised learning

Input: $x_1, x_2, \ldots, x_t$ összefoglaló néven: adat - vizuális, auditoros, szöveg

Gól: $\mathrm{P}\left(\mathbf{x}\right)$

(Supervised learning:

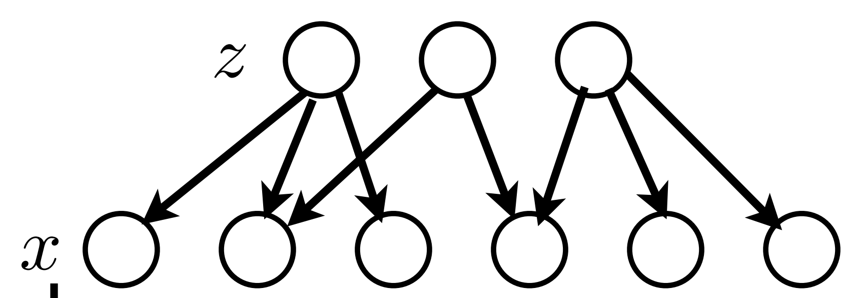
Input: $\{x_1, y_1\}, \{x_2, y_2\}, \ldots, \{x_t, y_t\}$

Gól: $\mathrm{P}\left(\mathbf{x} \,|\, \mathbf{y}\right)$)

$\mathrm{P}\left(\mathbf{x}\right)$ Bonyolult!

Miért is?

Egyszerűsítés: $\mathrm{P}\left(\mathbf{x}\right) = \mathrm{P}\left(\mathbf{x} \,|\, \mathbf{z}\right) \mathrm{P}\left(\mathbf{z}\right)$



- az adatot a “z”-k terében reprezentáljuk

Unsupervised learning

Input: $x_1, x_2, \ldots, x_t$ összefoglaló néven: adat - vizuális, auditoros, szöveg

Gól: $\mathrm{P}(\mathbf{x})$

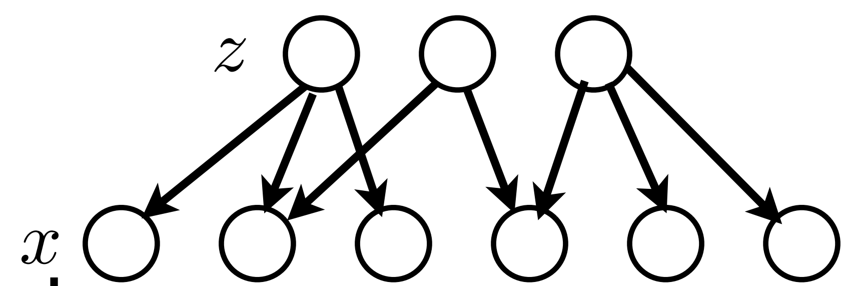
(Supervised learning:

Input: $\{x_1, y_1\}, \{x_2, y_2\}, \ldots, \{x_t, y_t\}$

Gól: $\mathrm{P}(\mathbf{x} \mid \mathbf{y})$)

$\mathrm{P}(\mathbf{x})$ Bonyolult!

Miért is?



Egyszerűsítés: $\mathrm{P}(\mathbf{x}) = \mathrm{P}(\mathbf{x} \mid \mathbf{z})\, \mathrm{P}(\mathbf{z})$

- az adatot a “z”-k terében reprezentáljuk
- kategorizáció, dimenzió redukció

Unsupervised learning

Input: $x_1, x_2, \ldots, x_t$ összefoglaló néven: adat - vizuális, auditoros, szöveg

Gól: $\mathrm{P}(\mathbf{x})$

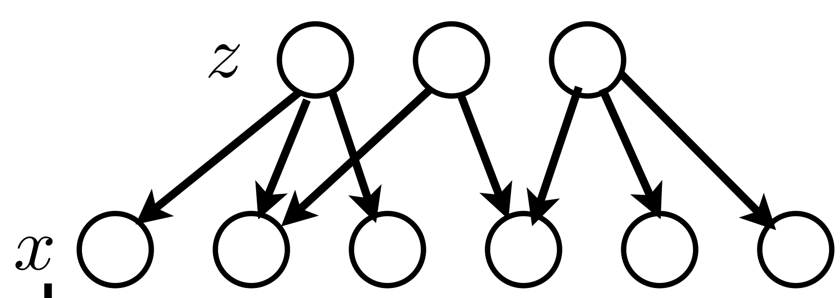
(Supervised learning:

Input: $\{x_1, y_1\}, \{x_2, y_2\}, \ldots, \{x_t, y_t\}$

Gól: $\mathrm{P}(\mathbf{x} \,|\, \mathbf{y})$)

$\mathrm{P}(\mathbf{x})$ Bonyolult!

Miért is?



Egyszerűsítés: $\mathrm{P}(\mathbf{x}) = \mathrm{P}(\mathbf{x} \,|\, \mathbf{z})\, \mathrm{P}(\mathbf{z})$

- az adatot a “z”-k terében reprezentáljuk
- kategorizáció, dimenzió redukció
- általánosabban a feladat: predikció, döntéshozatal, kommunikáció

Lineáris modellek

$$\mathrm{P}\left(x \mid z\right) = \mathrm{Normal}\left(x; z, \theta\right) = C \exp\left(\left(x - Az\right)^{T} \Sigma^{-1} \left(x - Az\right)\right)$$

Lineáris modellek

$$\mathrm{P}\left(x \mid z\right) = \mathrm{Normal}\left(x; z, \theta\right) = C \exp\Big(\left(x - Az\right)^{T} \Sigma^{-1} \left(x - Az\right)\Big)$$

PCA

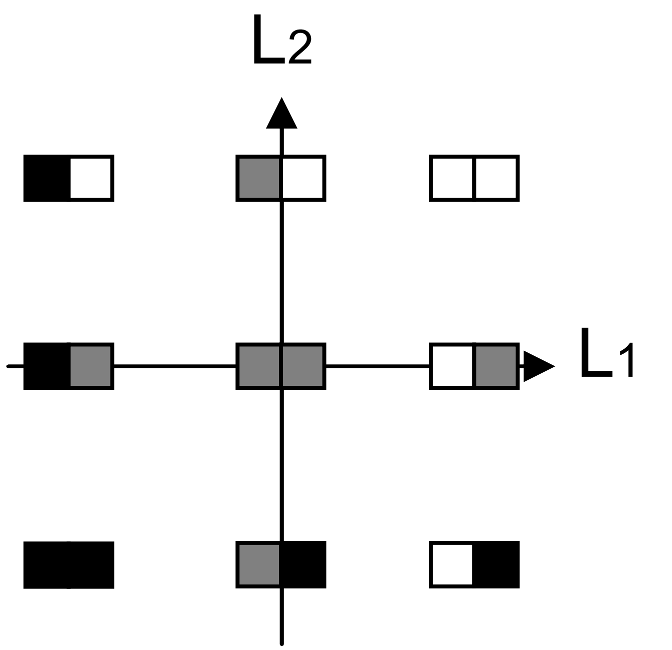
- A oszlopvektorai ortogonalisak
- D(x) = D(z)
- Izotróp zaj

Lineáris modellek

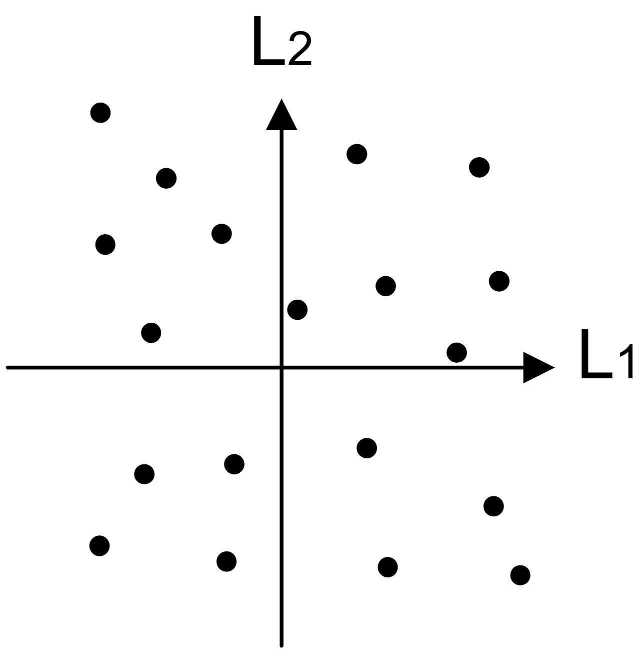
$$\mathrm{P}\left(x \mid z\right) = \mathrm{Normal}\left(x; z, \theta\right) = C \exp\left(\left(x - Az\right)^T \Sigma^{-1} \left(x - Az\right)\right)$$

PCA

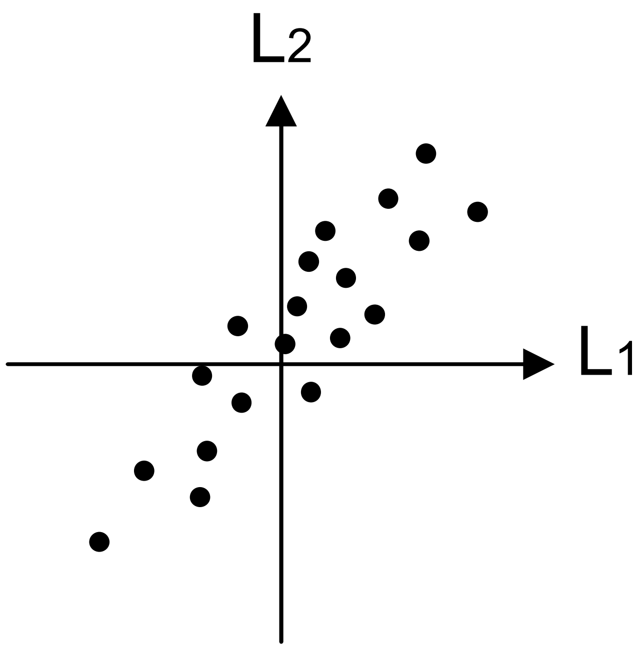
- A oszlopvektorai ortogonalisak
- D(x) = D(z)
- Izotróp zaj



State space of two pixel images



Random images



Structured images

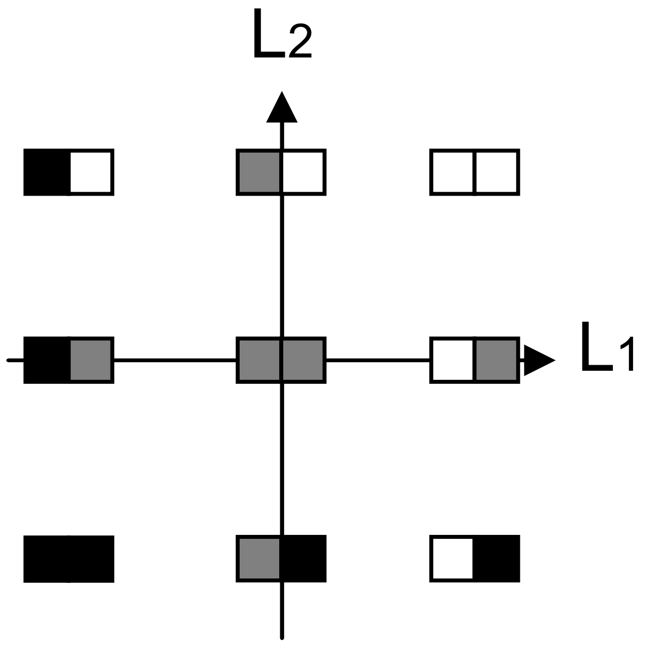
Lineáris modellek

$$\mathrm{P}\left(x \mid z\right) = \mathrm{Normal}\left(x; z, \theta\right) = C \exp\left(\left(x - Az\right)^T \Sigma^{-1} \left(x - Az\right)\right)$$

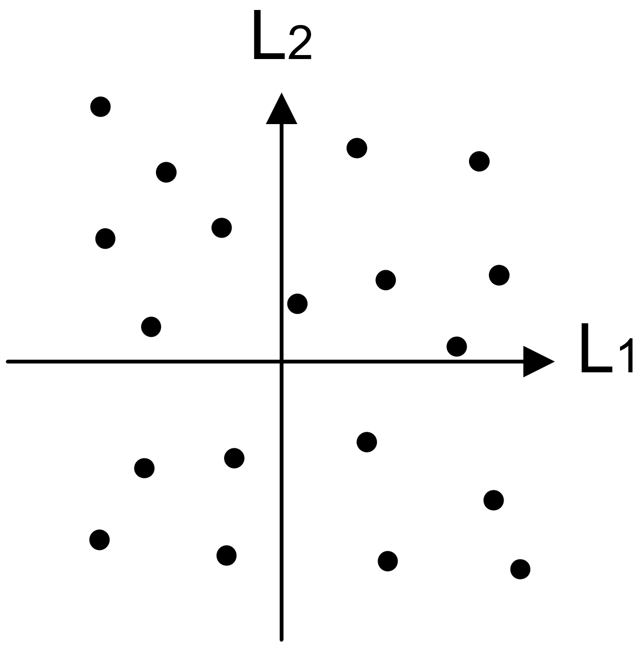
$$x = \mathbf{A} \cdot z + \epsilon$$

PCA

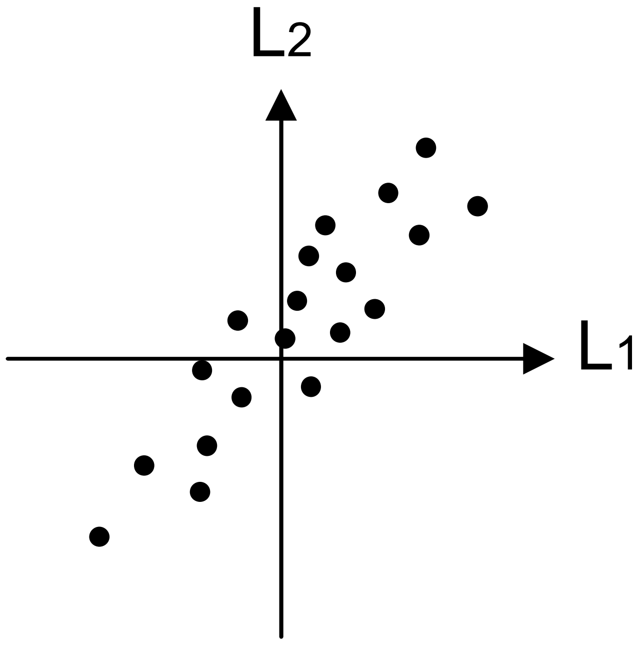
- A oszlopvektorai ortogonalisak
- D(x) = D(z)
- Izotróp zaj



State space of two pixel images



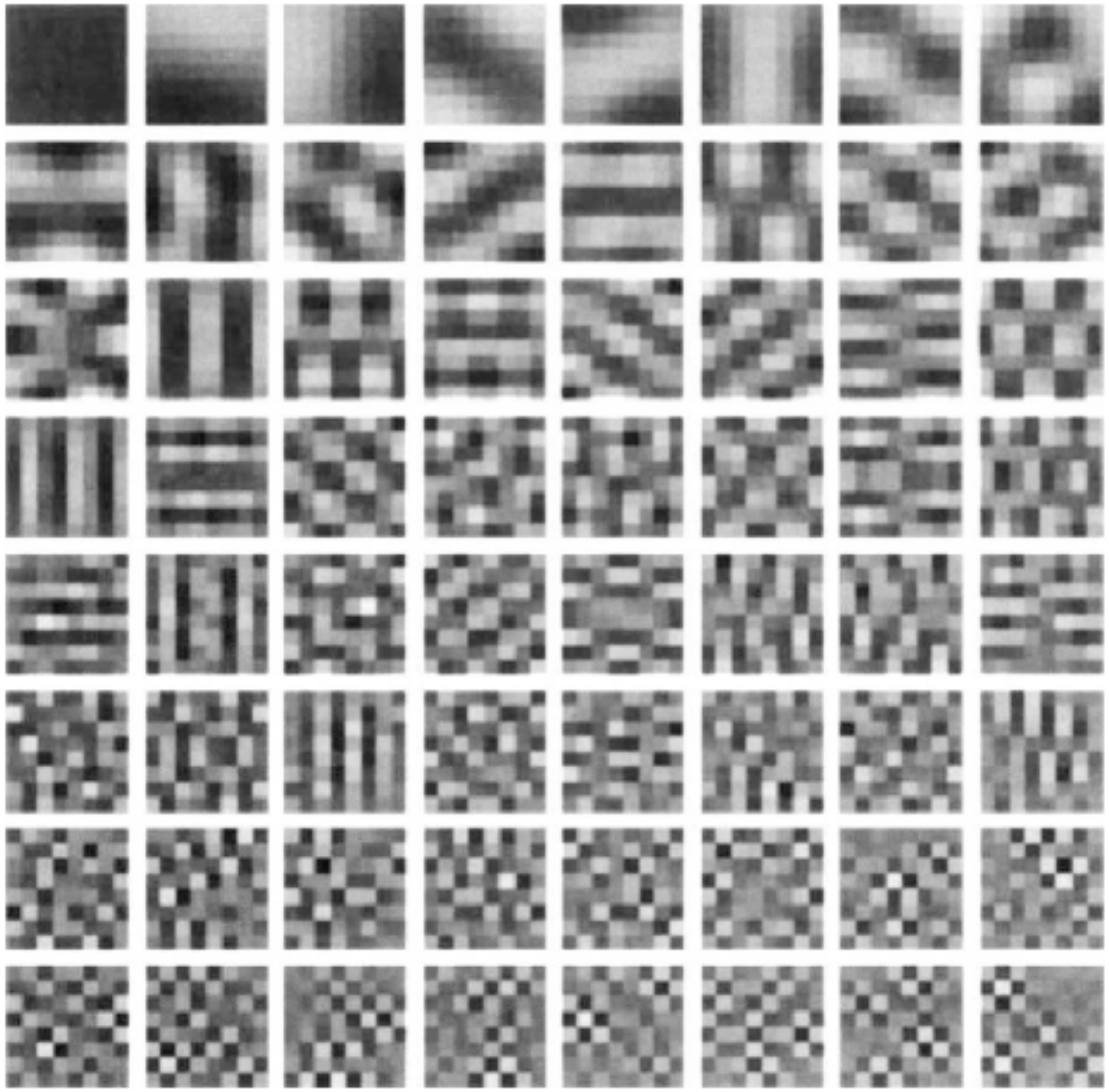
Random images



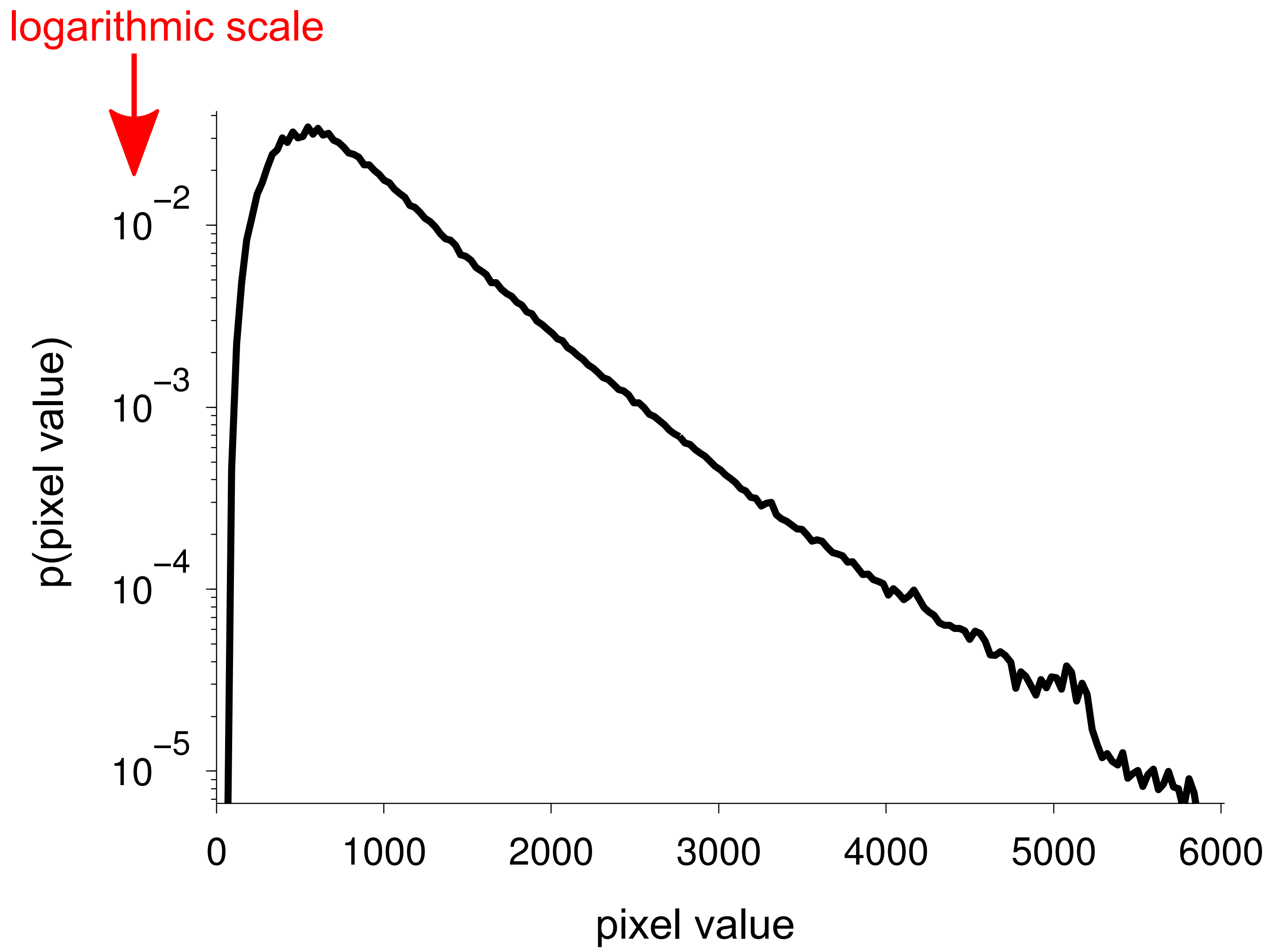
Structured images

PCA tulajdonságok

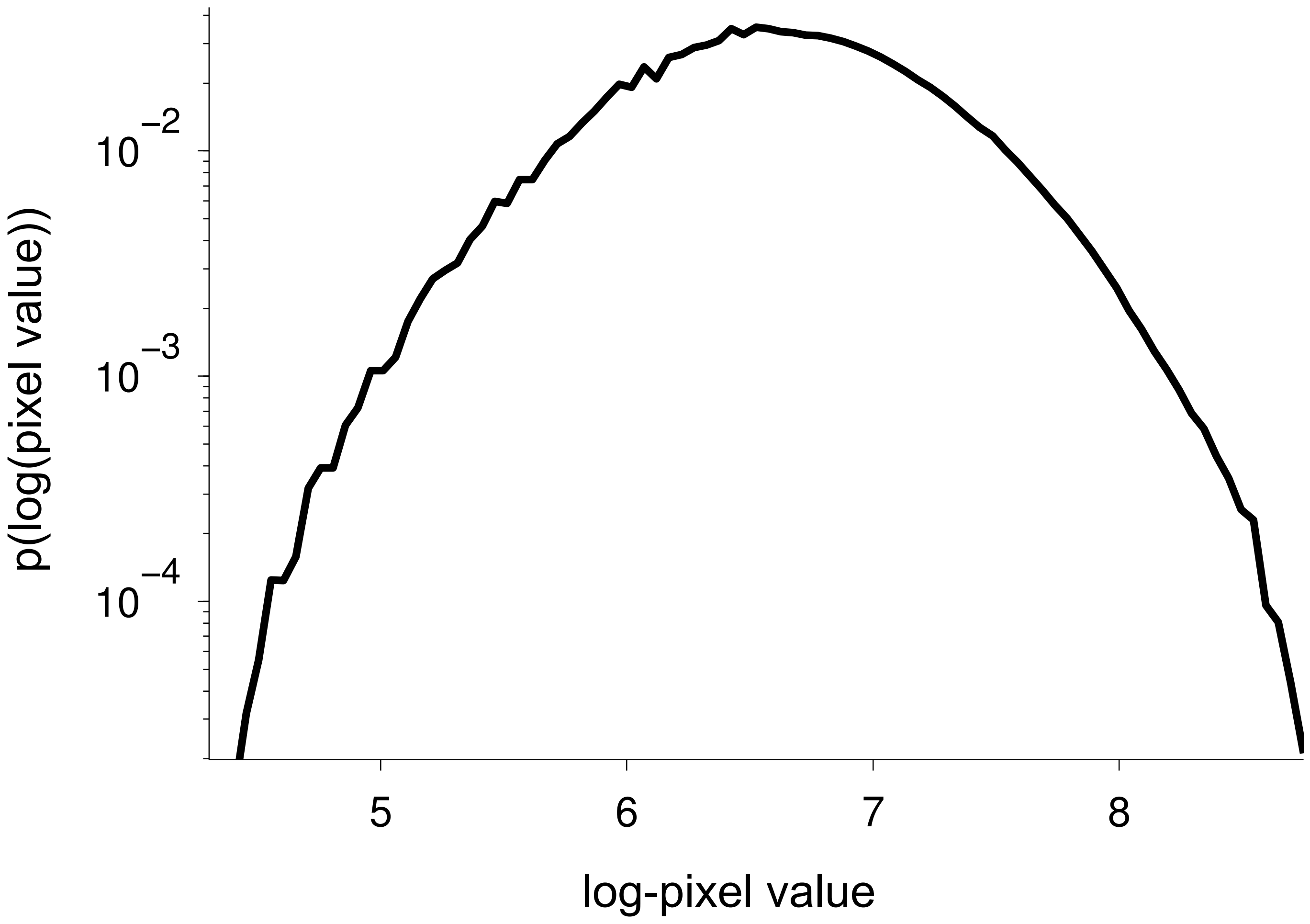
- Kompakt kódot eredményez
- Egy adatpont (kép) leírásáért általában a teljes hálózat felel



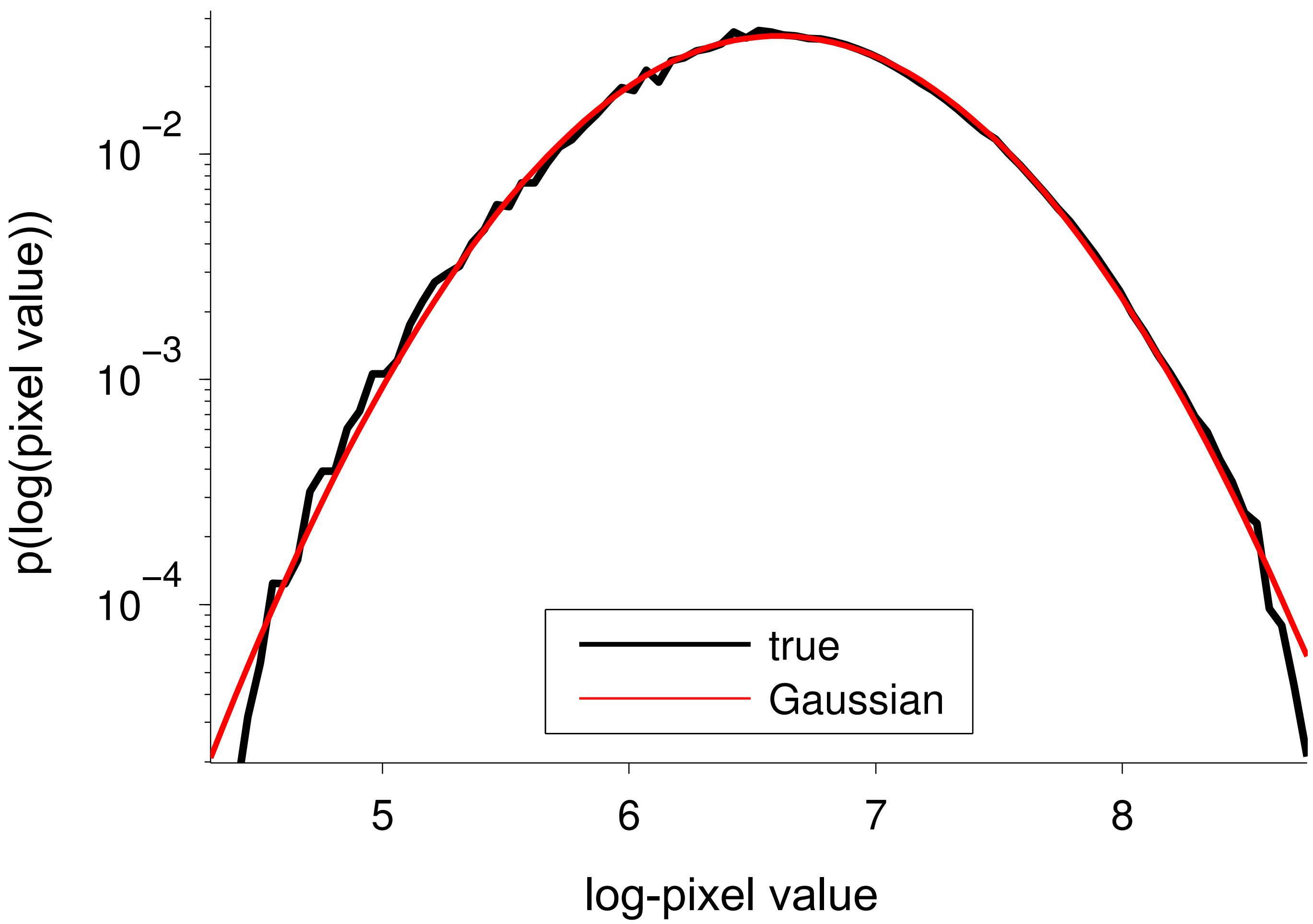
Marginális statisztika



Marginális statisztika



Marginális statisztika

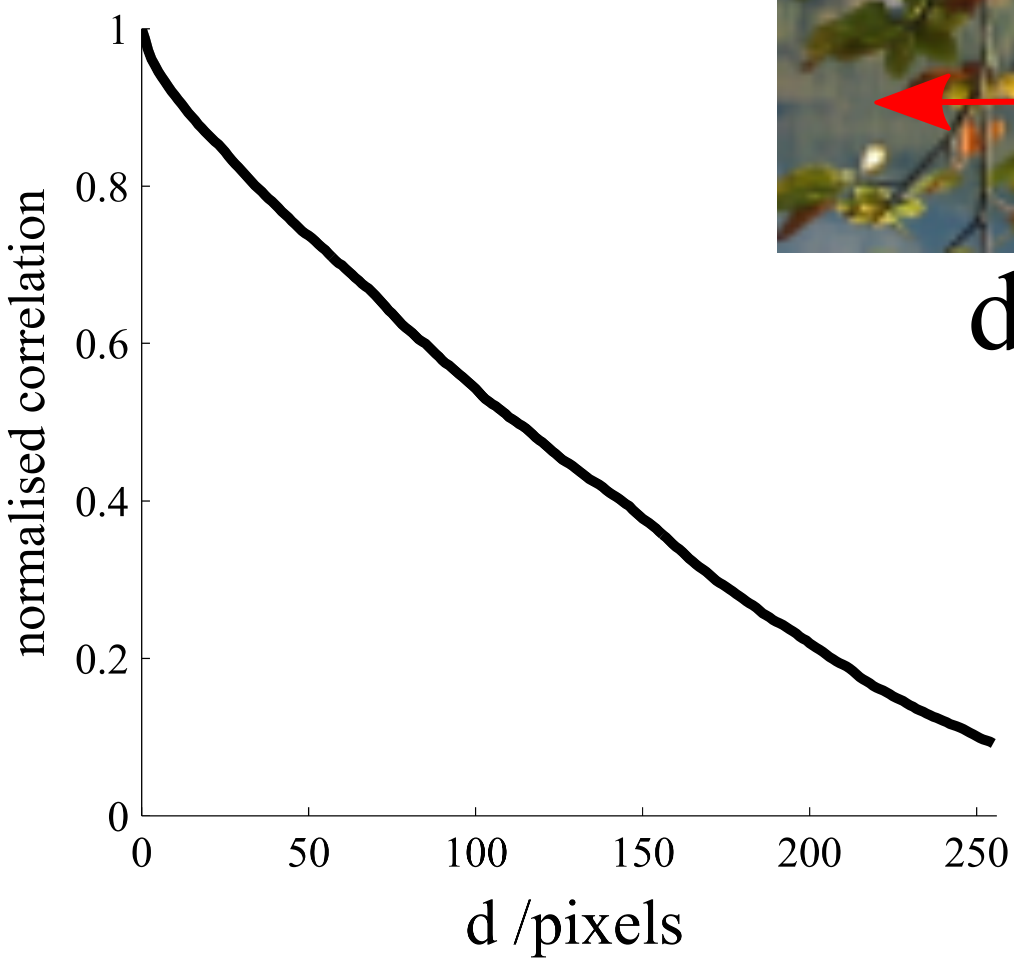


Ruderman, 1994

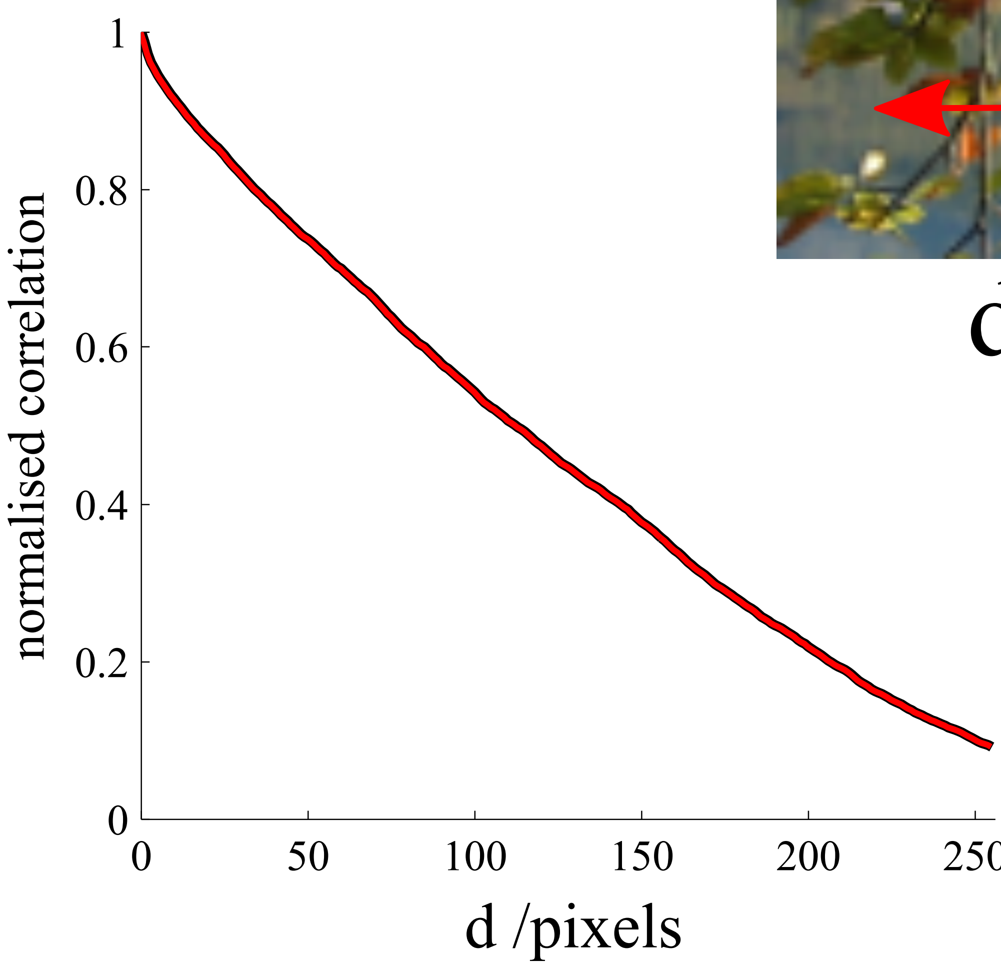
Pixel korrelációk

d

Pixel korrelációk

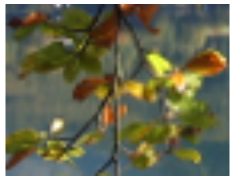
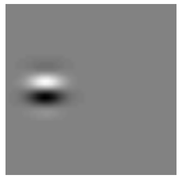


Pixel korrelációk

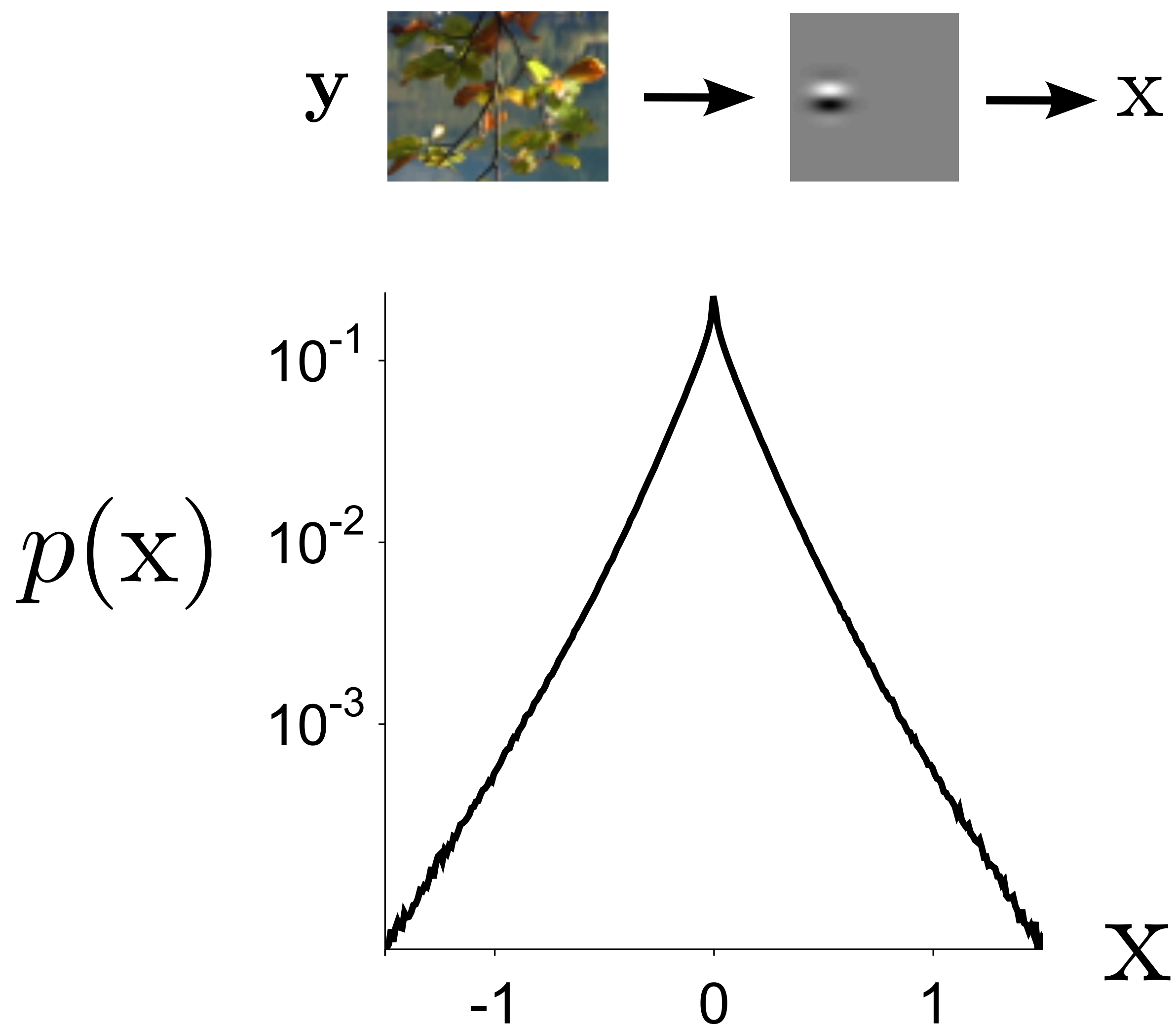


d

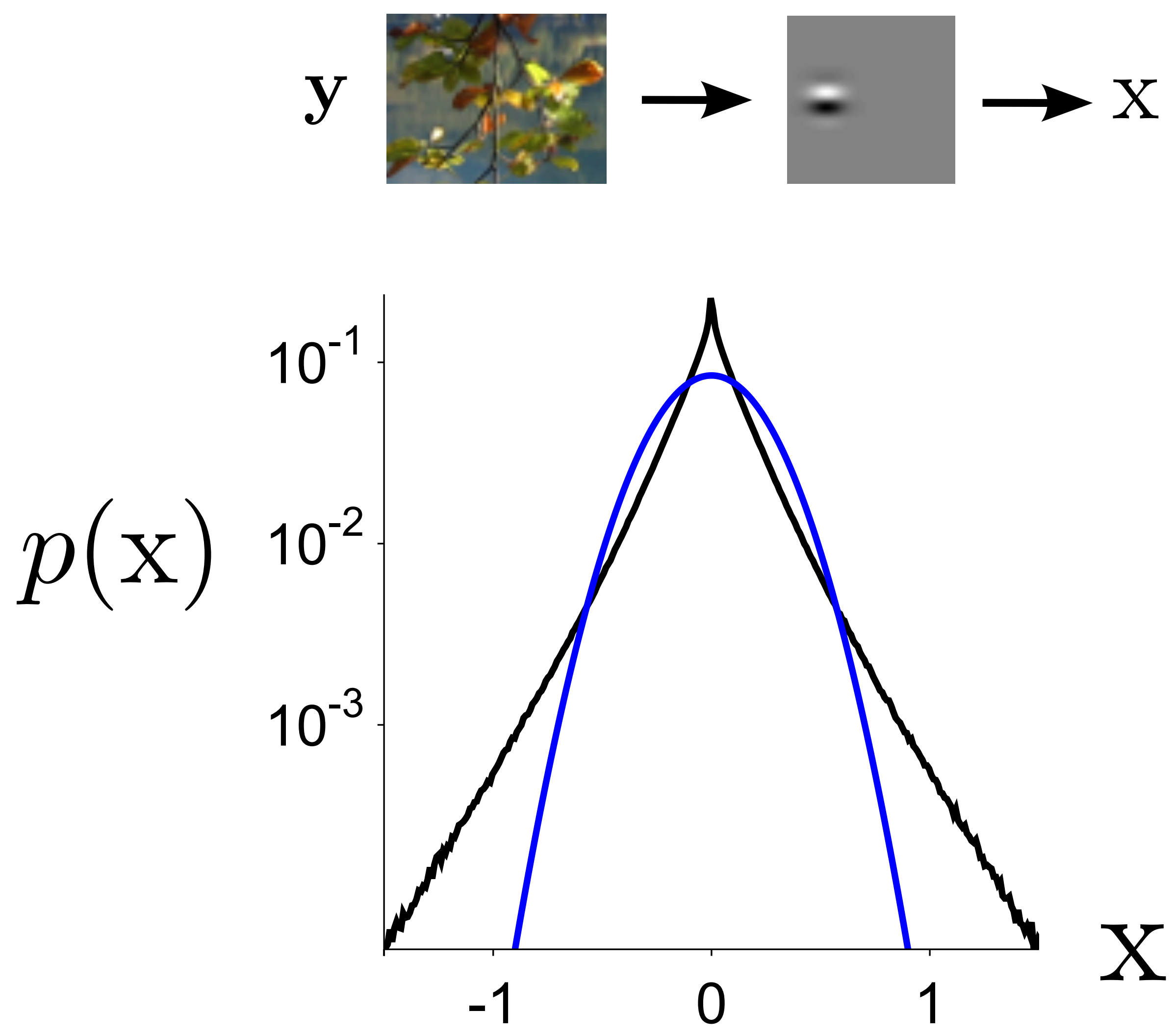
Magasabb rendű korrelációk: ritkaság

$\mathbf{y}$  $\longrightarrow$  $\longrightarrow \mathrm{x}$

Magasabb rendű korrelációk: ritkaság



Magasabb rendű korrelációk: ritkaság



Sparse kódolás, ICA

- “z”-k függetlenek
- y priorja “ritka”(P(z))

Sparse kódolás, ICA

$$x = \mathbf{A} \cdot z + \epsilon$$

- “z”-k függetlenek
- y priorja “ritka”(P(z))

Sparse kódolás, ICA

$$x = \mathbf{A} \cdot z + \epsilon$$

- “z”-k függetlenek
- y priorja “ritka”(P(z))

Komputációs kritériumok:

- Hiteles rekonstrukció
  költség egy adatpontra (képre):
  $$\mathrm{cost}_1 = \left(x - \sum_i A'_i \cdot z_i \right)^2$$
- Kis “energiafelhasználás (kevés szimultán aktiv neuron)
  további költség a kód “ritkasága”:
  $$\mathrm{cost}_2 = -\sum_i S\left(\frac{z_i}{\sigma}\right)$$
  S a Gauss-nál nagyobb kurtózissal bíró eloszlás
- teljes költség (~energia):
  $$E = -\mathrm{cost}_1 - \lambda \mathrm{cost}_2$$

Sparse kód tanulása: E-M

Algoritmus:

- Itáráció EM lépésekkel
- Random kezdeti feltételek
- Adott konnektivitási mátrixnál az aktiviások segítségével a költség minimalizálása
- Adott aktivitásokkal a költség minimalizálása a súlyok adaptálásával

Sparse kód tanulása: E-M

Algoritmus:

- Itáráció EM lépésekkel
- Random kezdeti feltételek
- Adott konnektivitási mátrixnál az aktiviások segítségével a költség minimalizálása
- Adott aktivitásokkal a költség minimalizálása a súlyok adaptálásával

Adott konnektivitási mátrix esetén a legjobb aktivitások megtalalása:

$$\dot{z}_i = \mathbf{A}_i x_t - \sum_j \mathbf{A}'_i \mathbf{A}_j z_j - \frac{\lambda}{\sigma} S' \left(\frac{z_i}{\sigma} \right)$$

Sparse kód tanulása: E-M

Algoritmus:
- Itáráció EM lépésekkel
- Random kezdeti feltételek
- Adott konnektivitási mátrixnál az aktiviások segítségével a költség minimalizálása
- Adott aktivitásokkal a költség minimalizálása a súlyok adaptálásával

Adott konnektivitási mátrix esetén a legjobb aktivitások megtalalása:

$$\dot{z}_i = \mathbf{A}_i x_t - \sum_j \mathbf{A}'_i \mathbf{A}_j z_j - \frac{\lambda}{\sigma} S' \left(\frac{z_i}{\sigma} \right)$$

Adott konnektivitási aktivációk esetén a legjobb súlyok megtalalása:

Sparse kód tanulása: E-M

Algoritmus:

- Itáráció EM lépésekkel
- Random kezdeti feltételek
- Adott konnektivitási mátrixnál az aktiviások segítségével a költség minimalizálása
- Adott aktivitásokkal a költség minimalizálása a súlyok adaptálásával

Adott konnektivitási mátrix esetén a legjobb aktivitások megtalalása:

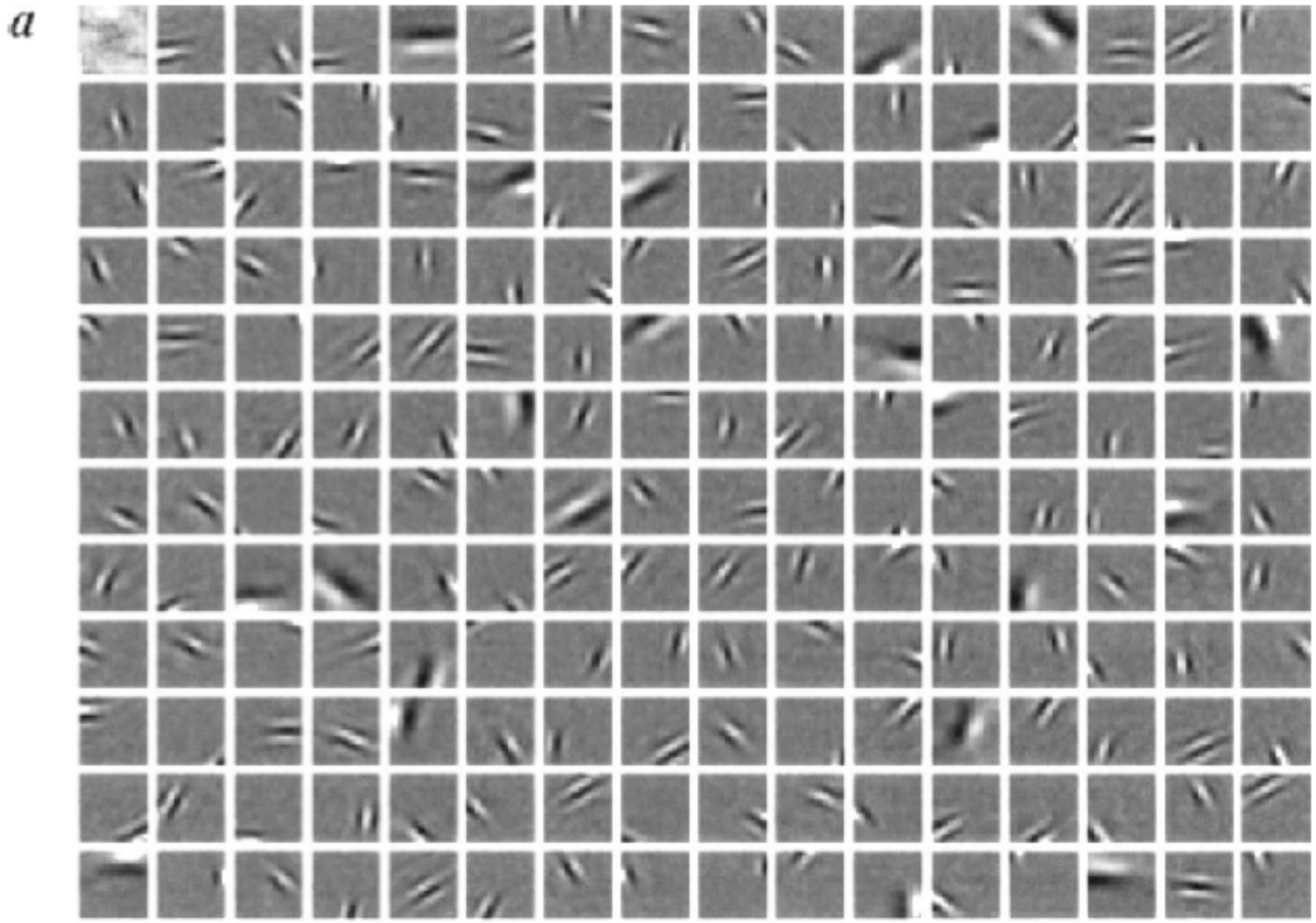
$$\dot{z}_i = \mathbf{A}_i x_t - \sum_j \mathbf{A}_i' \mathbf{A}_j z_j - \frac{\lambda}{\sigma} S' \left(\frac{z_i}{\sigma} \right)$$

Adott konnektivitási aktivációk esetén a legjobb súlyok megtalalása:

$$\Delta A_i = \eta \left\langle a_i \left[x - \hat{x} \right] \right\rangle_t$$

Sparse kódolás: eredmény

tréningezés természetes képekkel

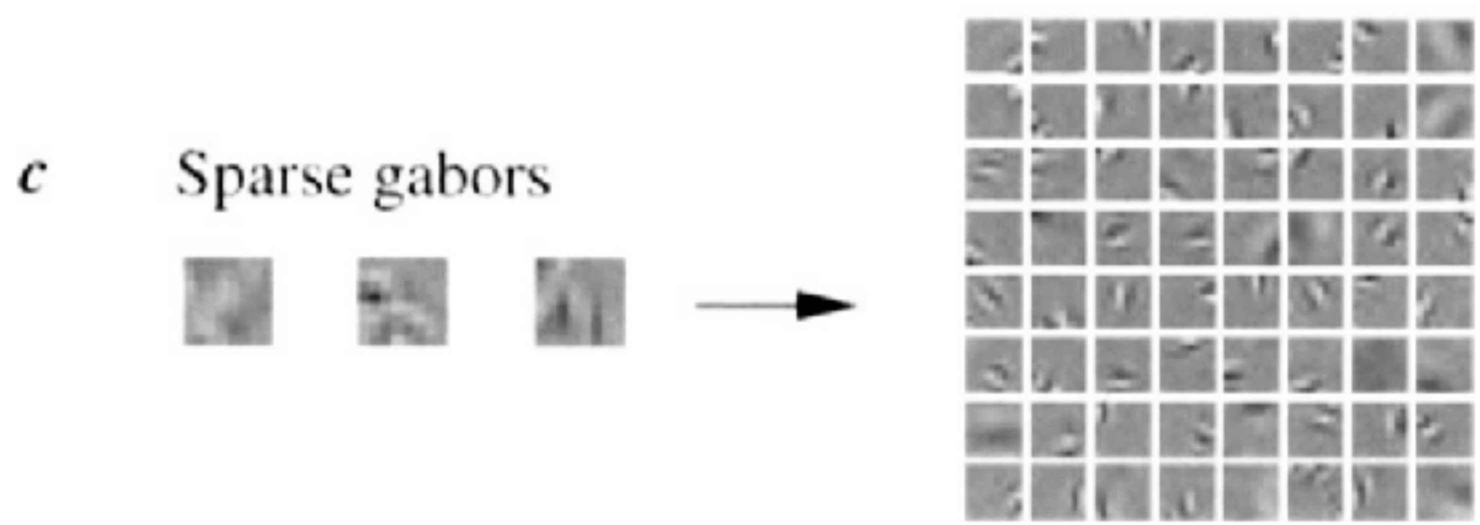


Olshausen & Field '96

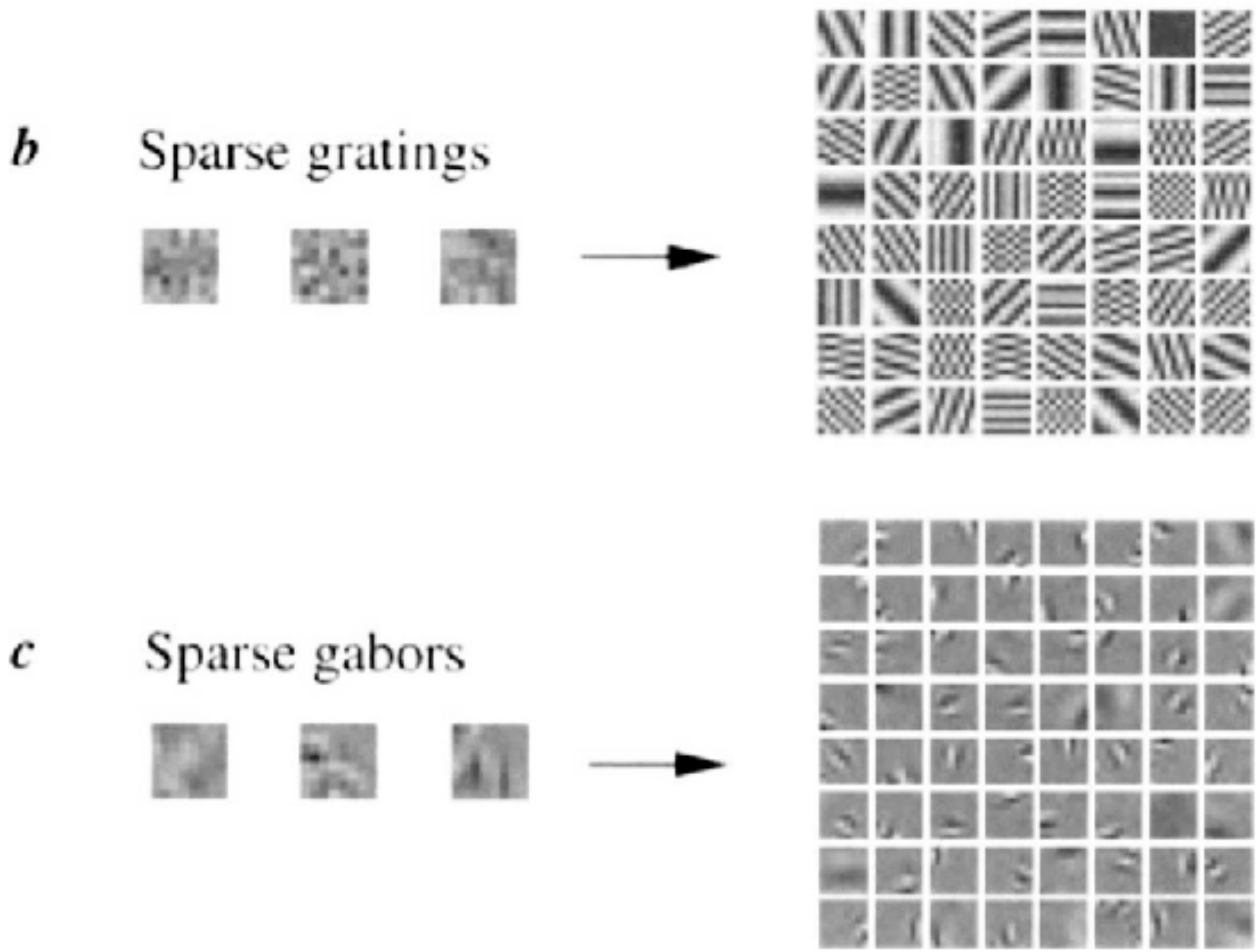
A kialakult bázis:

- irányított
- térbeli sávszűrést valósít meg
- lokalizált

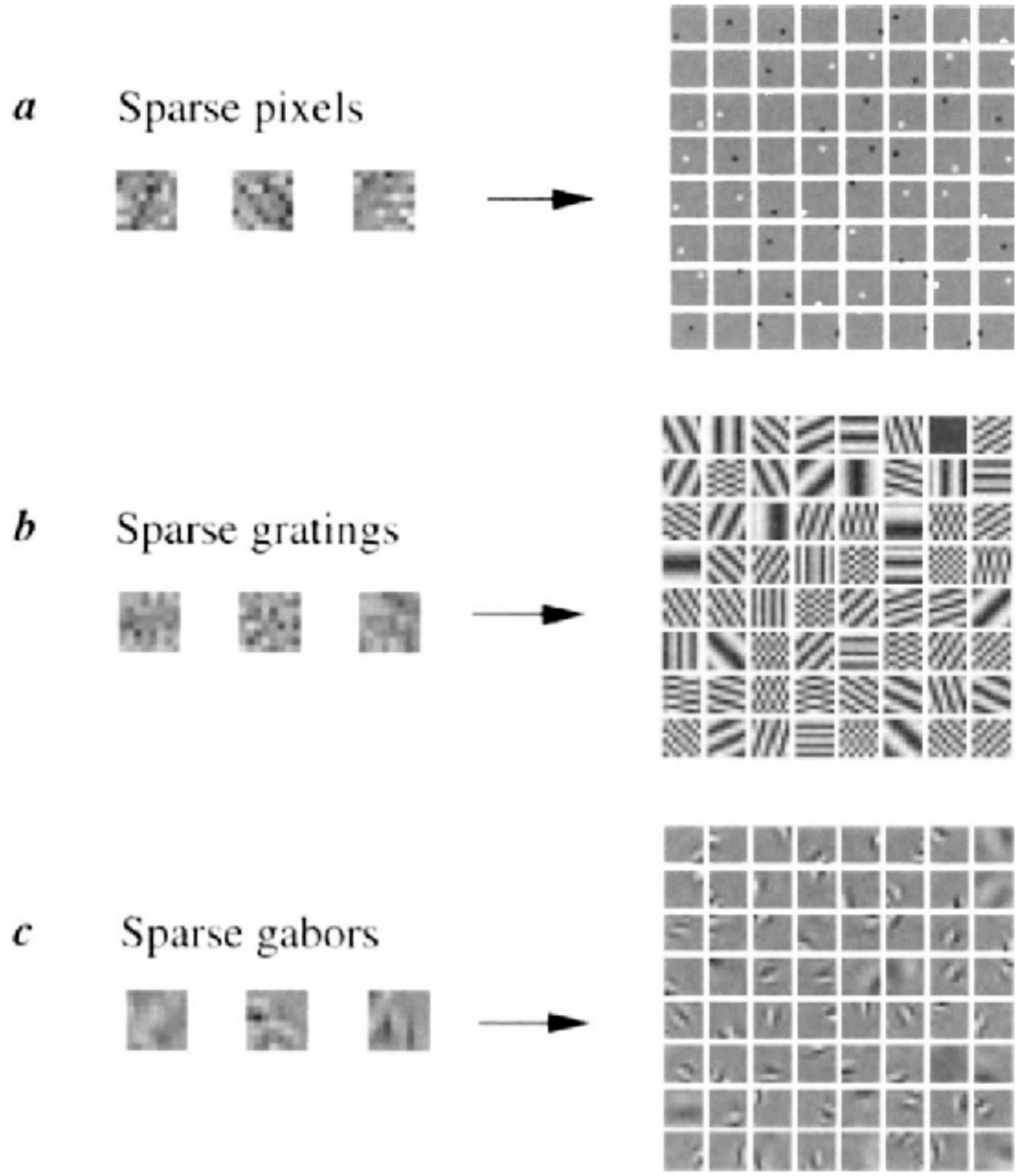
Tanulás és stimulus statisztika



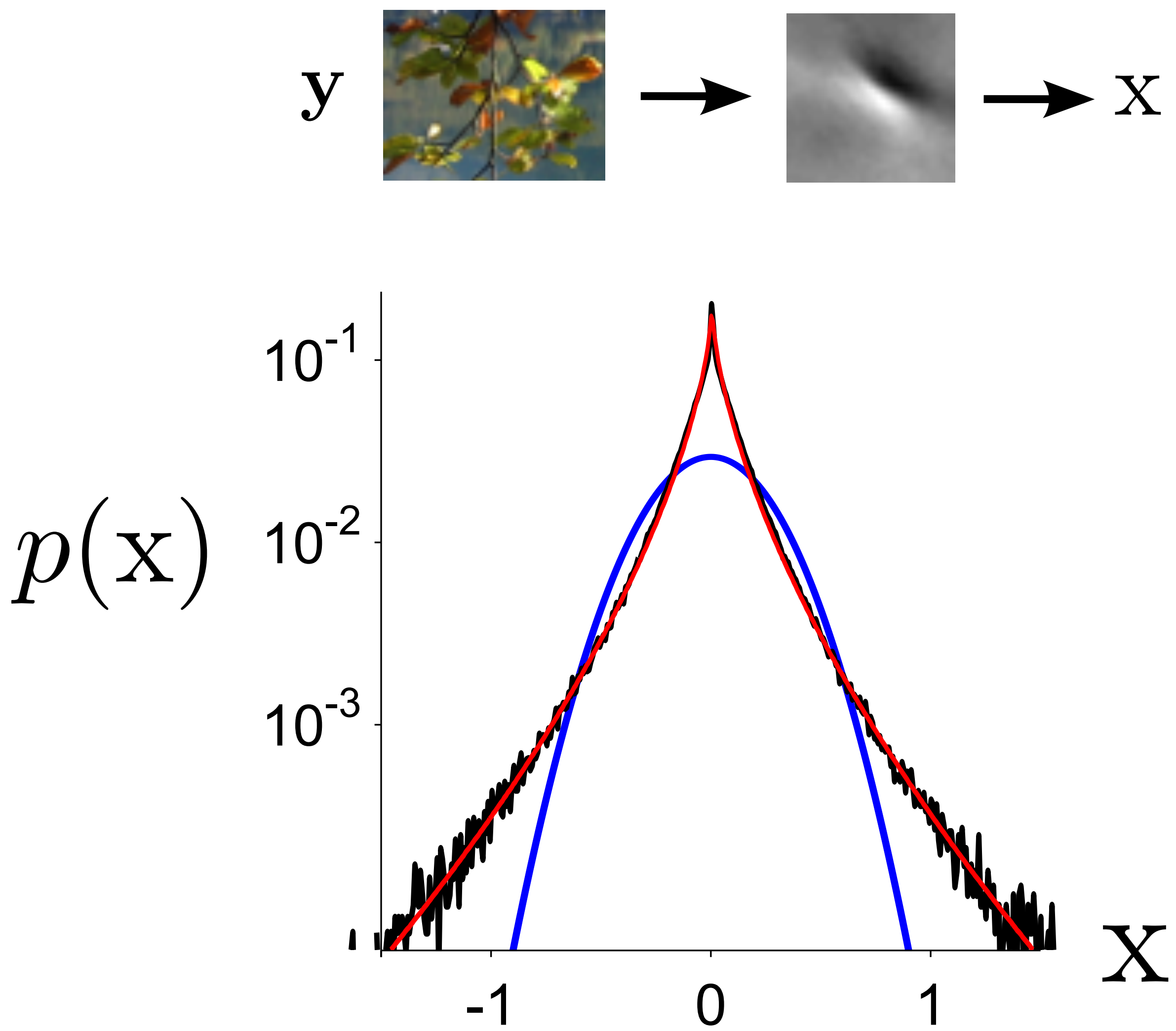
Tanulás és stimulus statisztika



Tanulás és stimulus statisztika



Magasabb rendű korrelációk: ritkaság

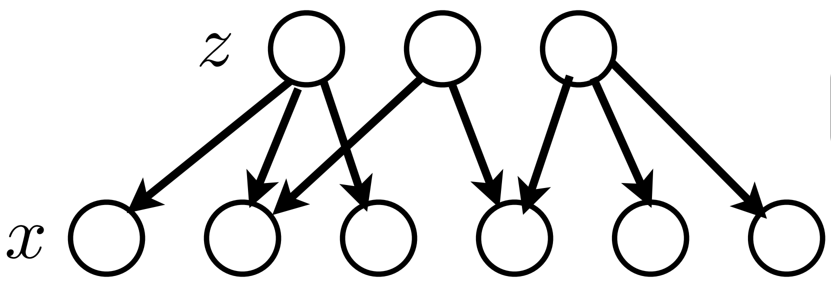


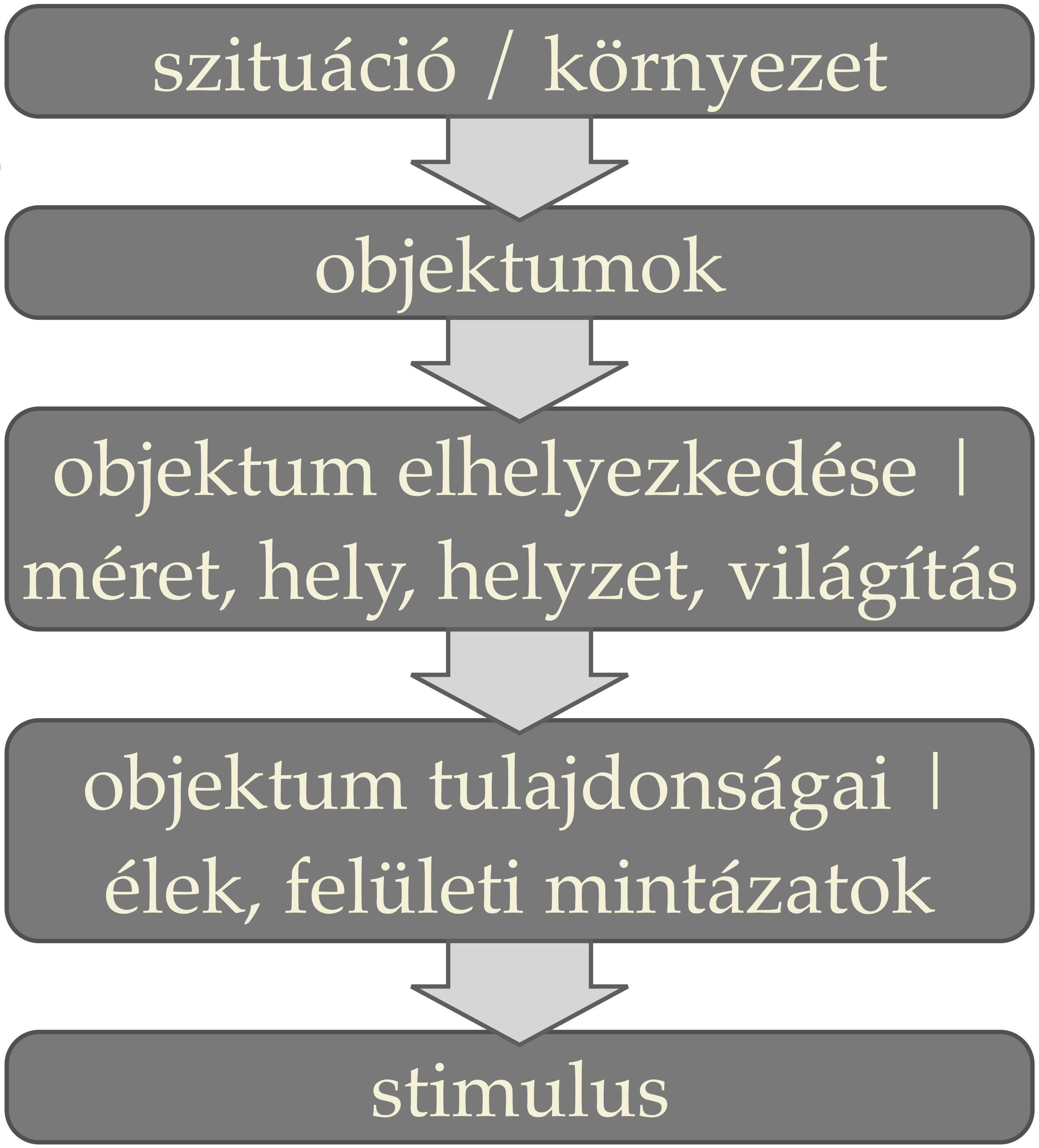
Generatív/rekogniciós modell

$$\mathrm{P}\left(\mathbf{x}\right) = \mathrm{P}\left(\mathbf{x}\,|\,\mathbf{z}\right)\mathrm{P}\left(\mathbf{z}\right)$$

Generatív/rekogniciós modell

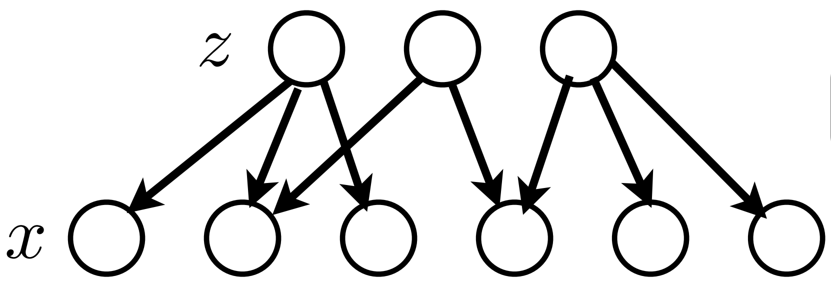
$$\mathrm{P}(\mathbf{x}) = \mathrm{P}(\mathbf{x} \mid \mathbf{z})\, \mathrm{P}(\mathbf{z})$$

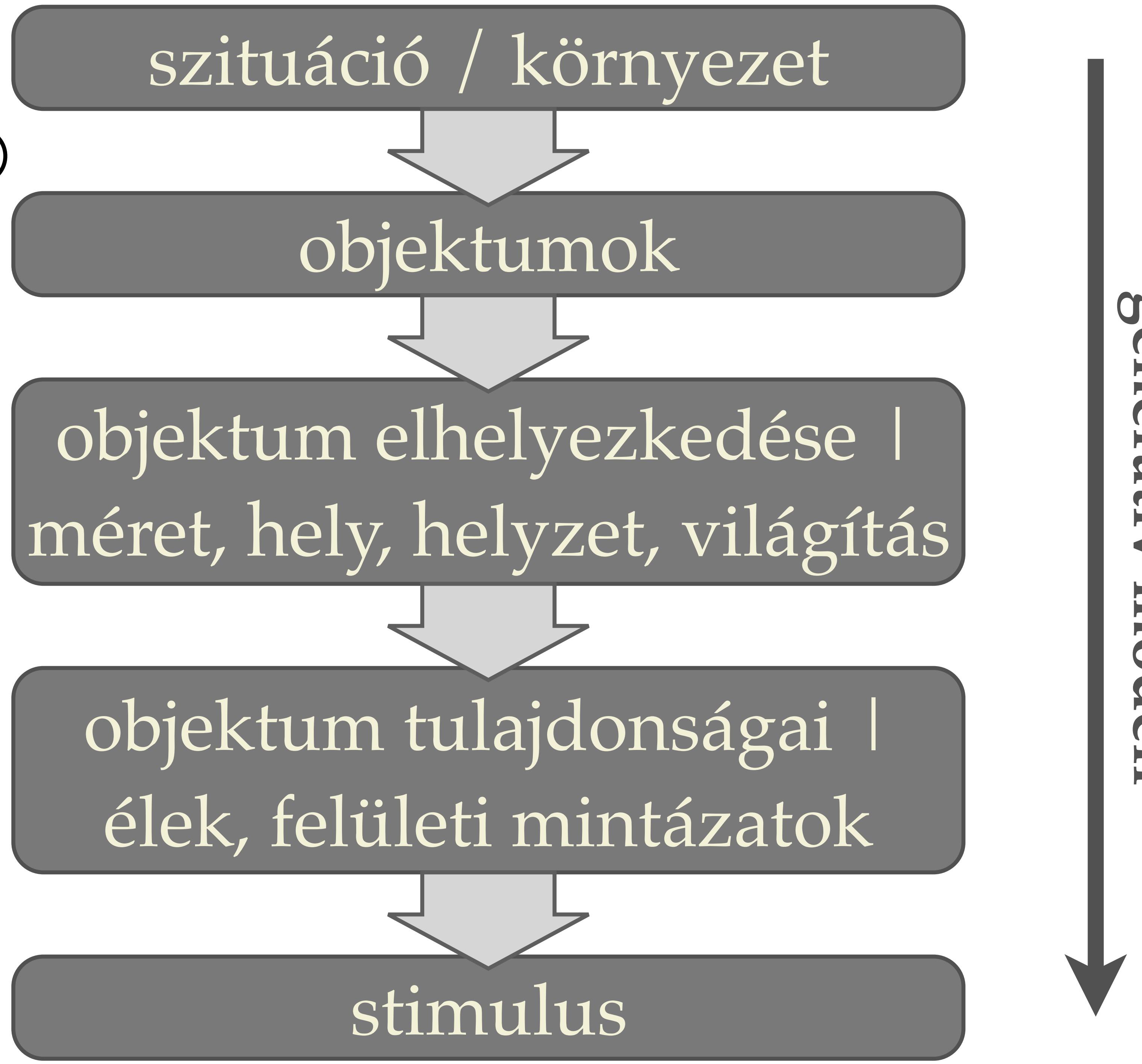




Generatív/rekogniciós modell

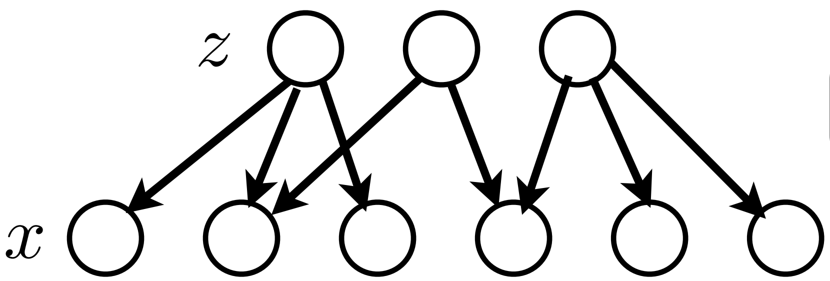
$$\mathrm{P}\left(\mathbf{x}\right) = \mathrm{P}\left(\mathbf{x}\,|\,\mathbf{z}\right)\mathrm{P}\left(\mathbf{z}\right)$$

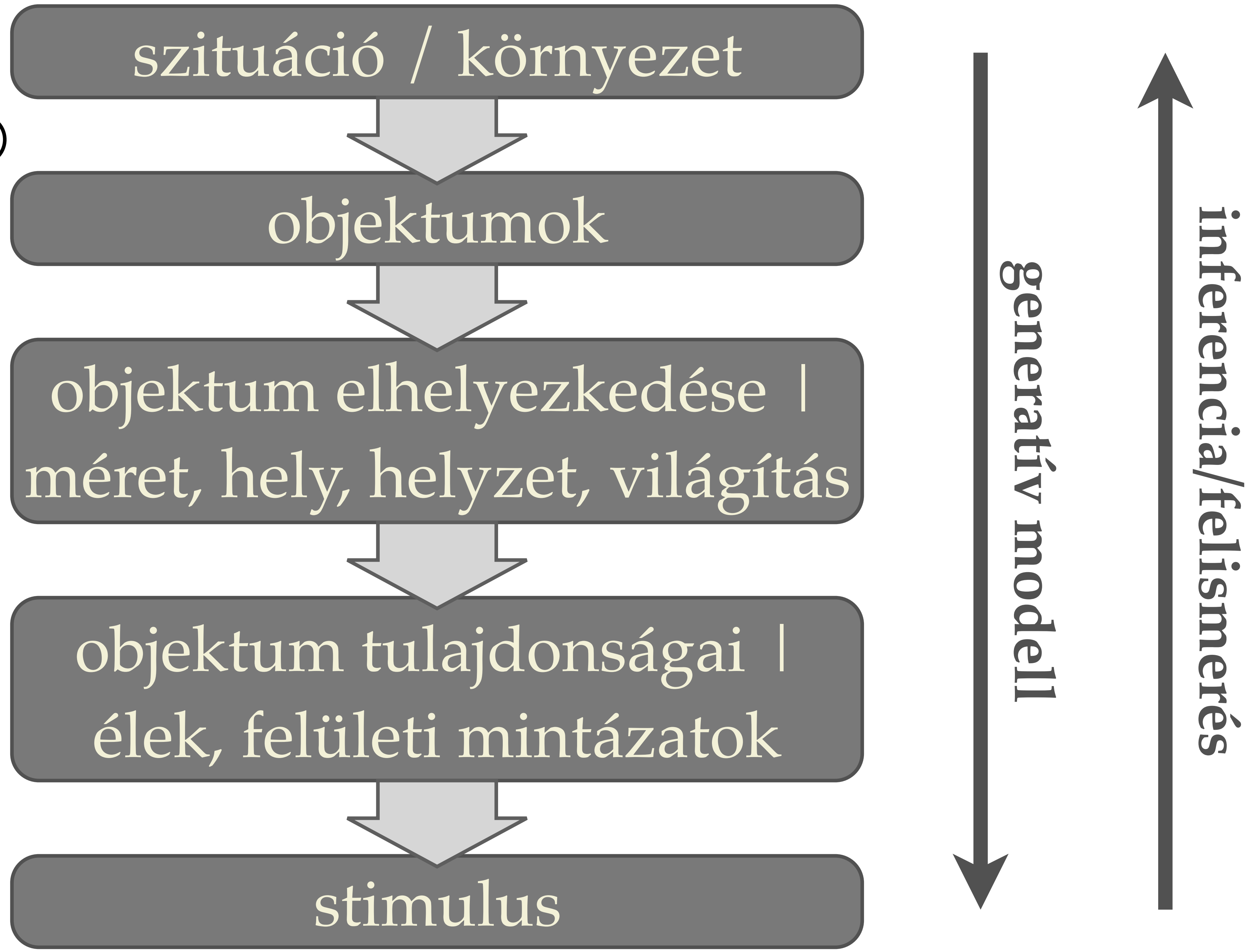




Generatív/rekogniciós modell

$$\mathrm{P}\left(\mathbf{x}\right) = \mathrm{P}\left(\mathbf{x}\,|\,\mathbf{z}\right)\mathrm{P}\left(\mathbf{z}\right)$$





Generatív/rekogniciós modell

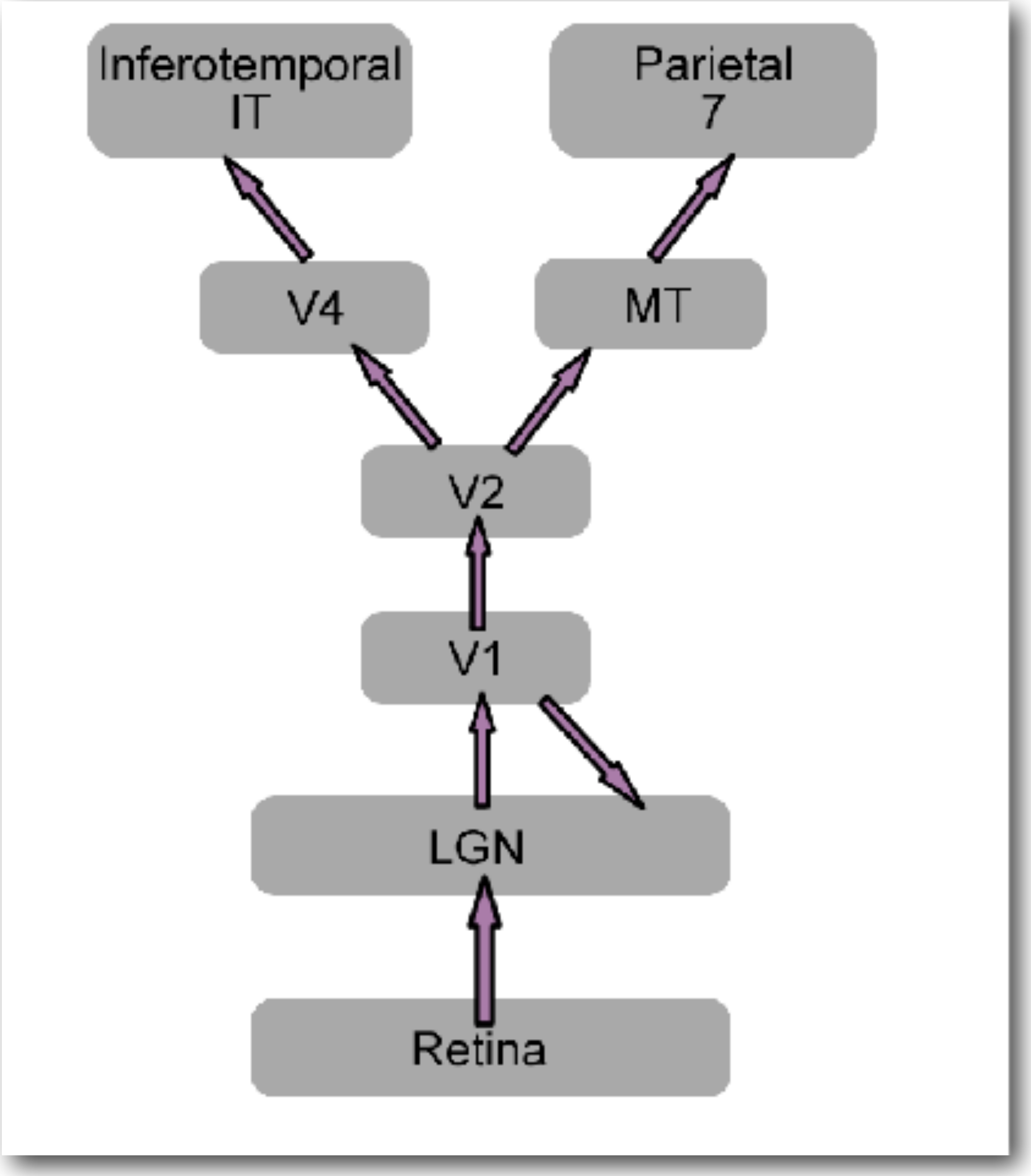
szituáció / környezet

objektumok

objektum elhelyezkedése | méret, hely, helyzet, világítás

objektum tulajdonságai | élek, felületi mintázatok

stimulus



Generatív/rekogniciós modell

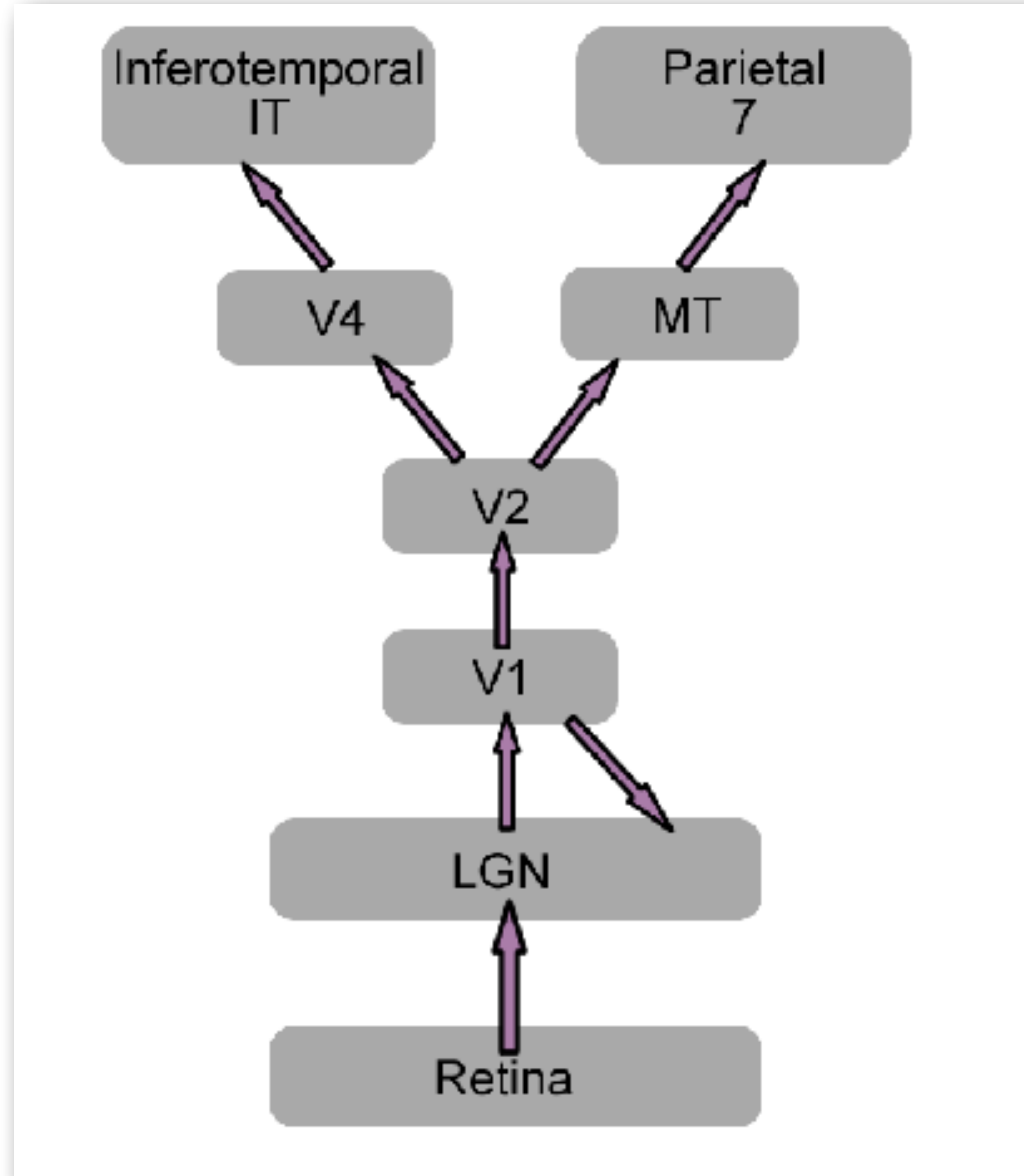
szituáció / környezet

objektumok

objektum elhelyezkedése | méret, hely, helyzet, világítás

objektum tulajdonságai | élek, felületi mintázatok

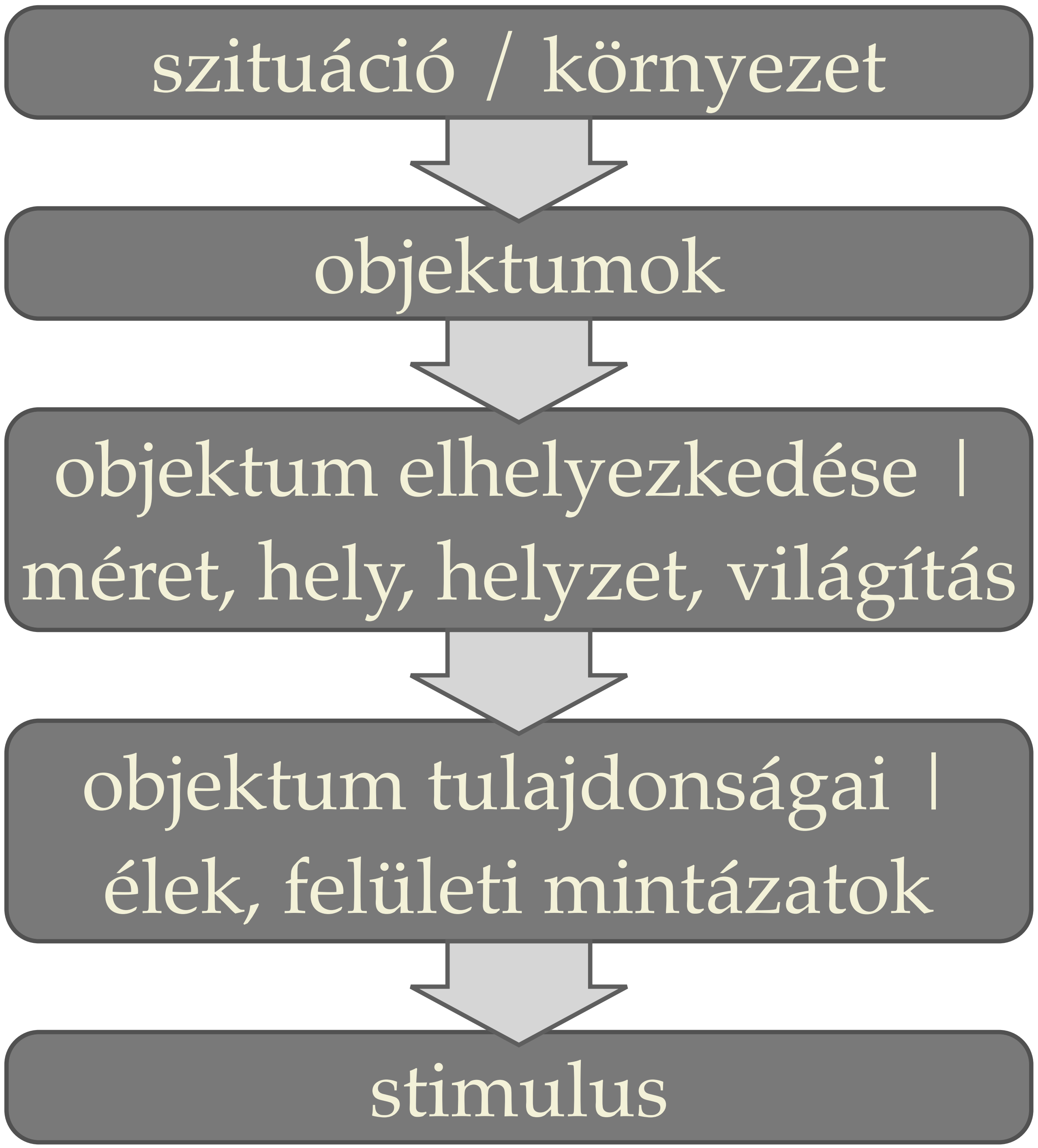
stimulus

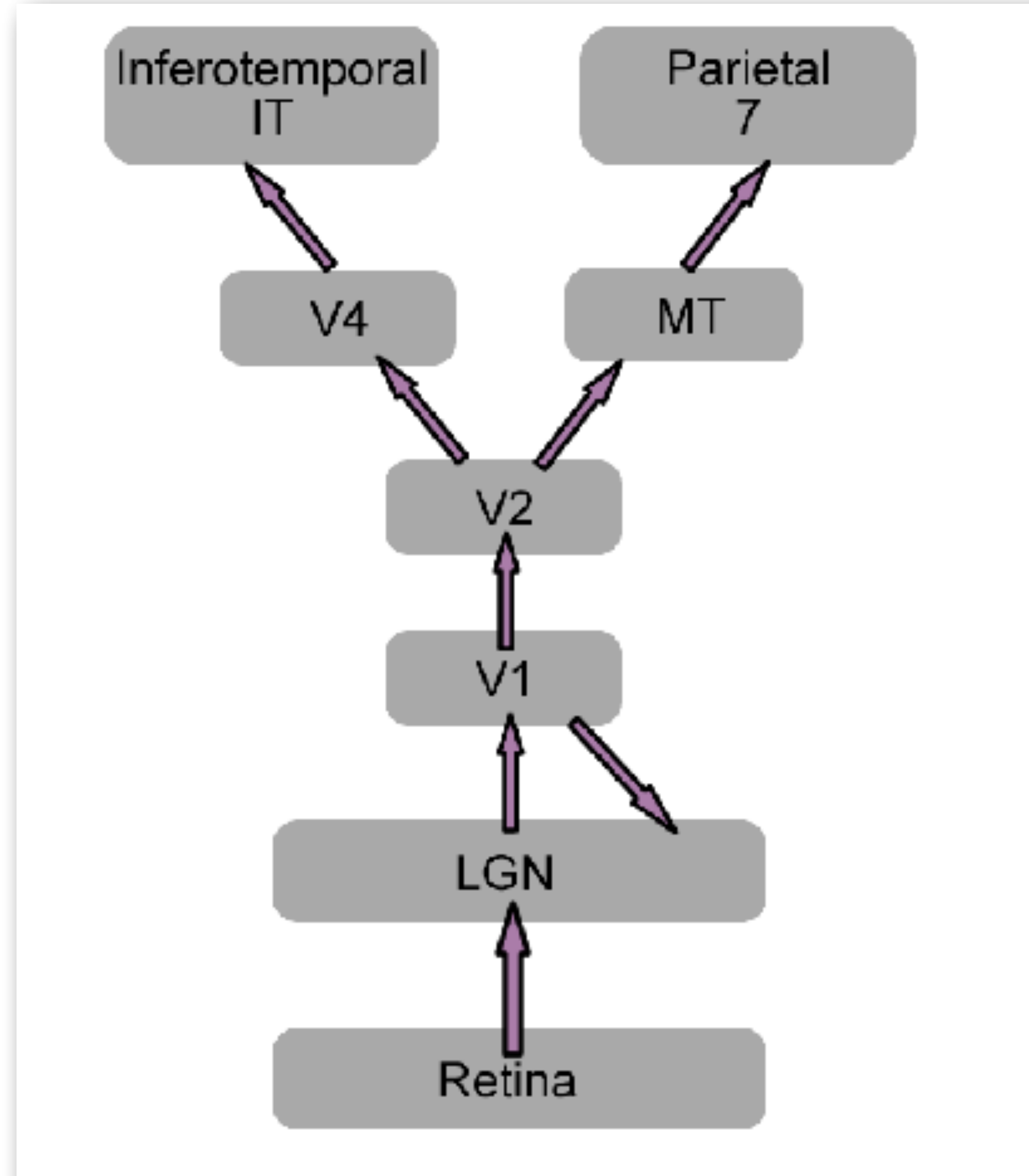


Modell definició -> rekogníció:

$$\mathrm{P}\left(x\,|z\right)$$

Generatív/rekogniciós modell





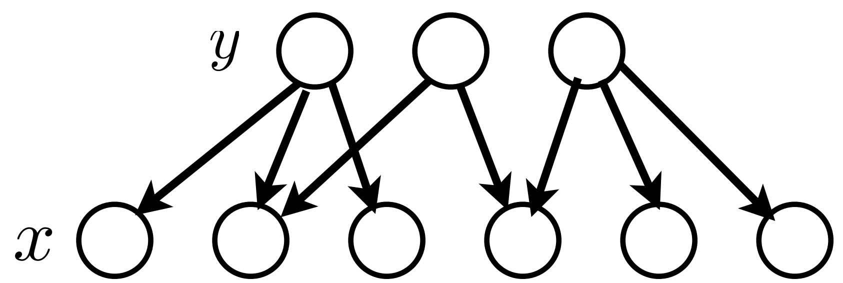
Modell definició -> rekogníció:

$$\mathrm{P}\left(x\,|z\right)$$

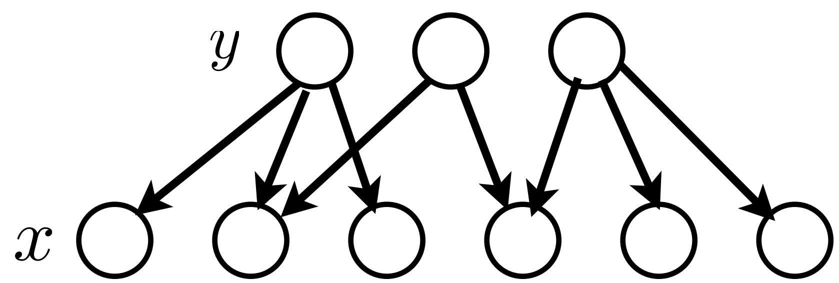
Inferencia igénye -> rekogníció:

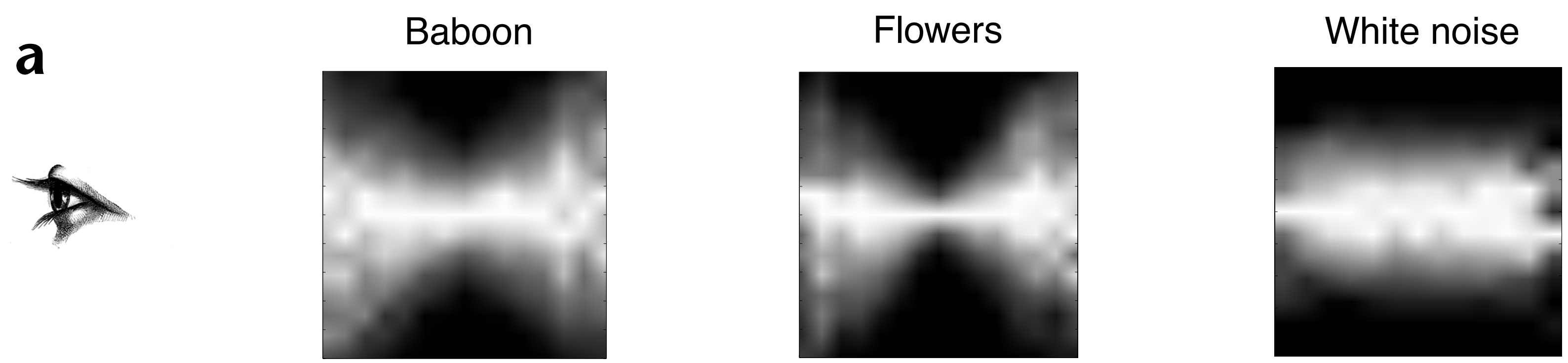
$$\mathrm{P}\left(z\,|x\right)$$

Independens komponensek



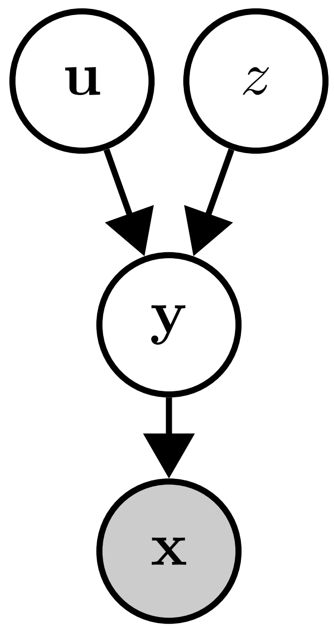
Independens komponensek





Schwartz & Simoncelli, 2001

Gaussian Scale Mixtures



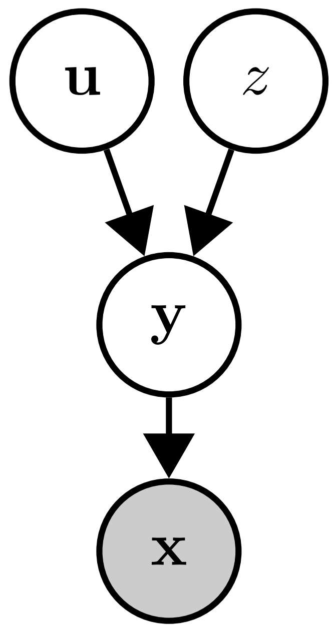
$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}(\mathbf{x}|\mathbf{y}) &= \mathcal{N}\big(\mathbf{x}; \mathbf{A}\mathbf{y}, \sigma_{\mathrm{x}}^2\mathbf{I}\big)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{y} &= z\,\mathbf{u} \\
\mathrm{P}(\mathbf{u}) &= \mathcal{N}(\mathbf{u}; \mathbf{0}, \mathbf{C}) \\
\mathrm{P}(z) &= \mathrm{Gamma}(z; k, \theta)
\end{aligned}
$$

1

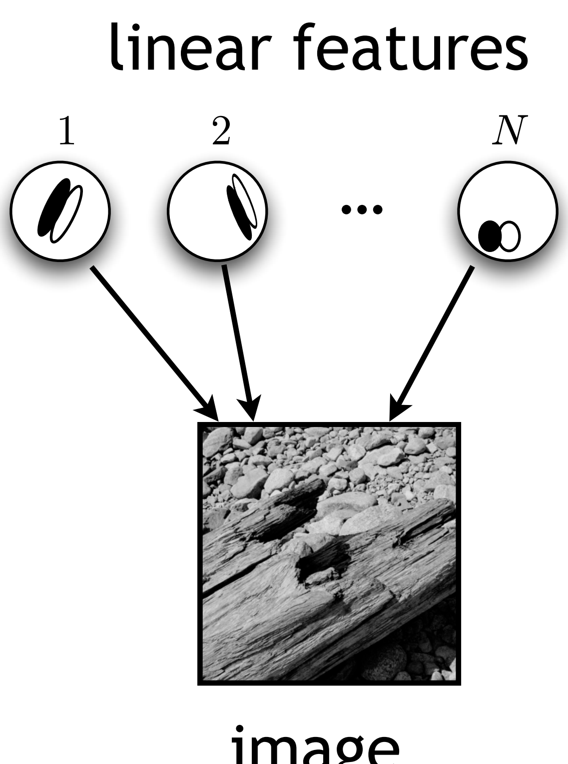
image

Gaussian Scale Mixtures

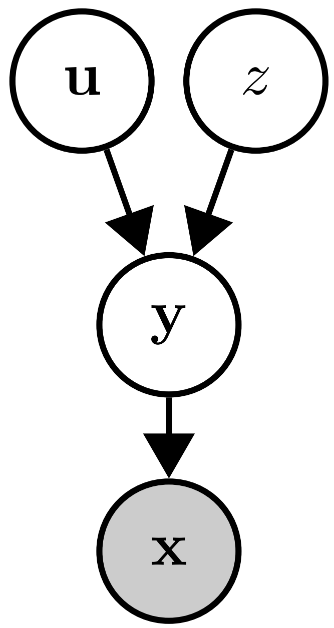


$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}(\mathbf{x}|\mathbf{y}) &= \mathcal{N}\big(\mathbf{x}; \mathbf{A}\mathbf{y}, \sigma_{\mathrm{x}}^2\mathbf{I}\big)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{y} &= z\,\mathbf{u} \\
\mathrm{P}(\mathbf{u}) &= \mathcal{N}(\mathbf{u}; \mathbf{0}, \mathbf{C}) \\
\mathrm{P}(z) &= \mathrm{Gamma}(z; k, \theta)
\end{aligned}
$$

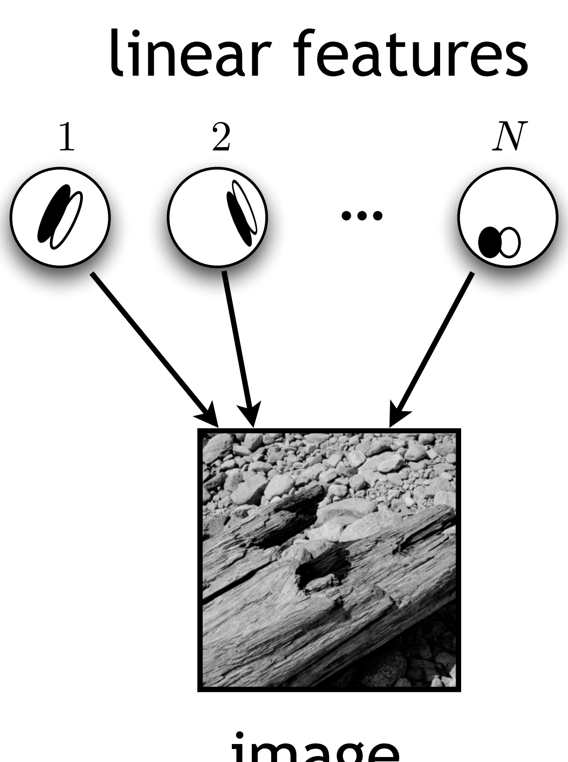


Gaussian Scale Mixtures

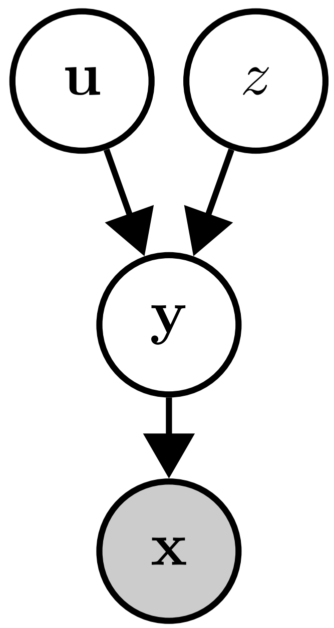


$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}(\mathbf{x}|\mathbf{y}) &= \mathcal{N}\left(\mathbf{x}; \mathbf{A}\mathbf{y}, \sigma_{\mathrm{x}}^2\mathbf{I}\right) \\
\mathbf{y} &= z\,\mathbf{u} \\
\mathrm{P}(\mathbf{u}) &= \mathcal{N}(\mathbf{u}; \mathbf{0}, \mathbf{C}) \\
\mathrm{P}(z) &= \mathrm{Gamma}(z; k, \theta)
\end{aligned}
$$

$$\text{image} = \quad a_1\,\text{feature}_1 + a_2\,\text{feature}_2 + \ldots + a_N\,\text{feature}_N \quad + \text{noise}$$

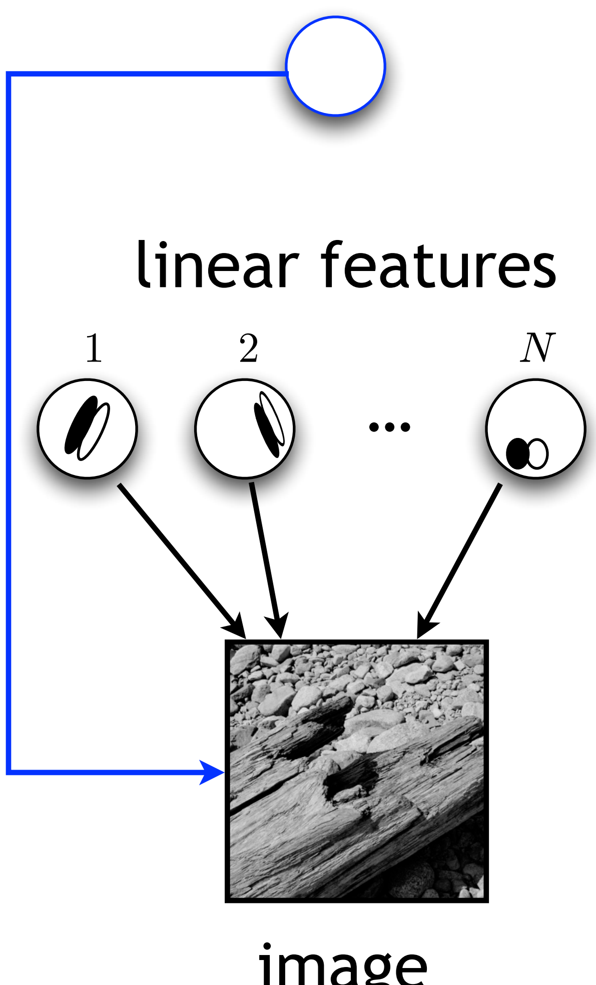


Gaussian Scale Mixtures



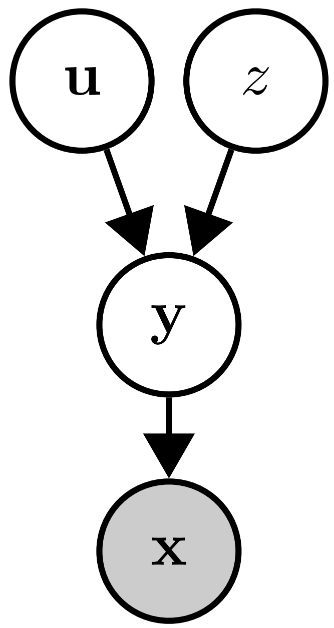
$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}(\mathbf{x}|\mathbf{y}) &= \mathcal{N}\left(\mathbf{x}; \mathbf{A}\mathbf{y}, \sigma_{\mathrm{x}}^2 \mathbf{I}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{y} &= z\,\mathbf{u} \\
\mathrm{P}(\mathbf{u}) &= \mathcal{N}(\mathbf{u}; \mathbf{0}, \mathbf{C}) \\
\mathrm{P}(z) &= \mathrm{Gamma}(z; k, \theta)
\end{aligned}
$$



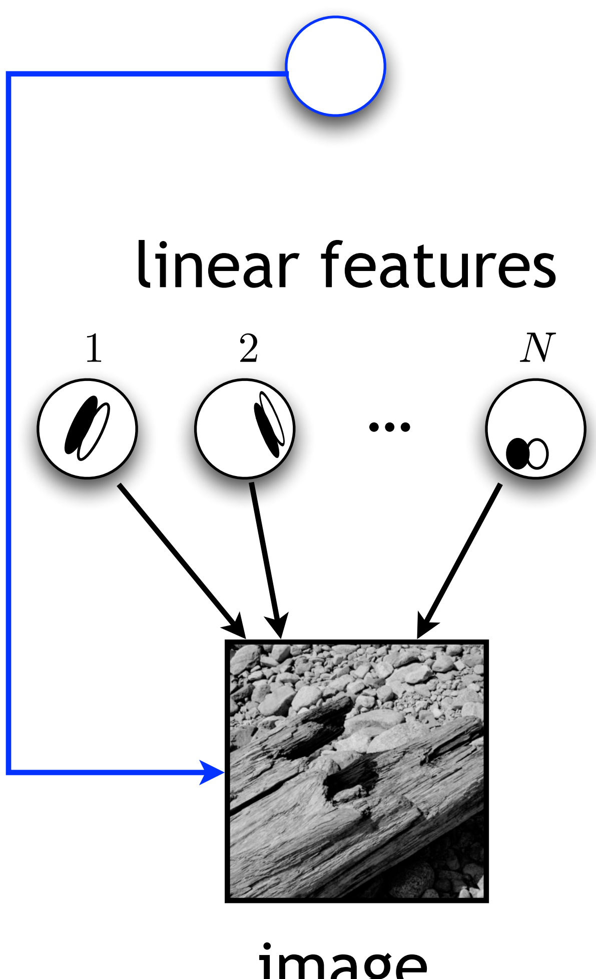
$$\text{image} = \text{contrast} \times \left(a_1\, \text{feature}_1 + a_2\, \text{feature}_2 + \ldots + a_N\, \text{feature}_N \quad + \text{noise}\right)$$

Gaussian Scale Mixtures



$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}(\mathbf{x}|\mathbf{y}) &= \mathcal{N}\left(\mathbf{x}; \mathbf{A}\mathbf{y}, \sigma_{\mathrm{x}}^2\mathbf{I}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{y} &= z\,\mathbf{u} \\
\mathrm{P}(\mathbf{u}) &= \mathcal{N}(\mathbf{u}; \mathbf{0}, \mathbf{C}) \\
\mathrm{P}(z) &= \mathrm{Gamma}(z; k, \theta)
\end{aligned}
$$



$$\text{image} = \text{contrast} \times \left(a_1\,\text{feature}_1 + a_2\,\text{feature}_2 + \ldots + a_N\,\text{feature}_N \quad + \text{noise}\right)$$

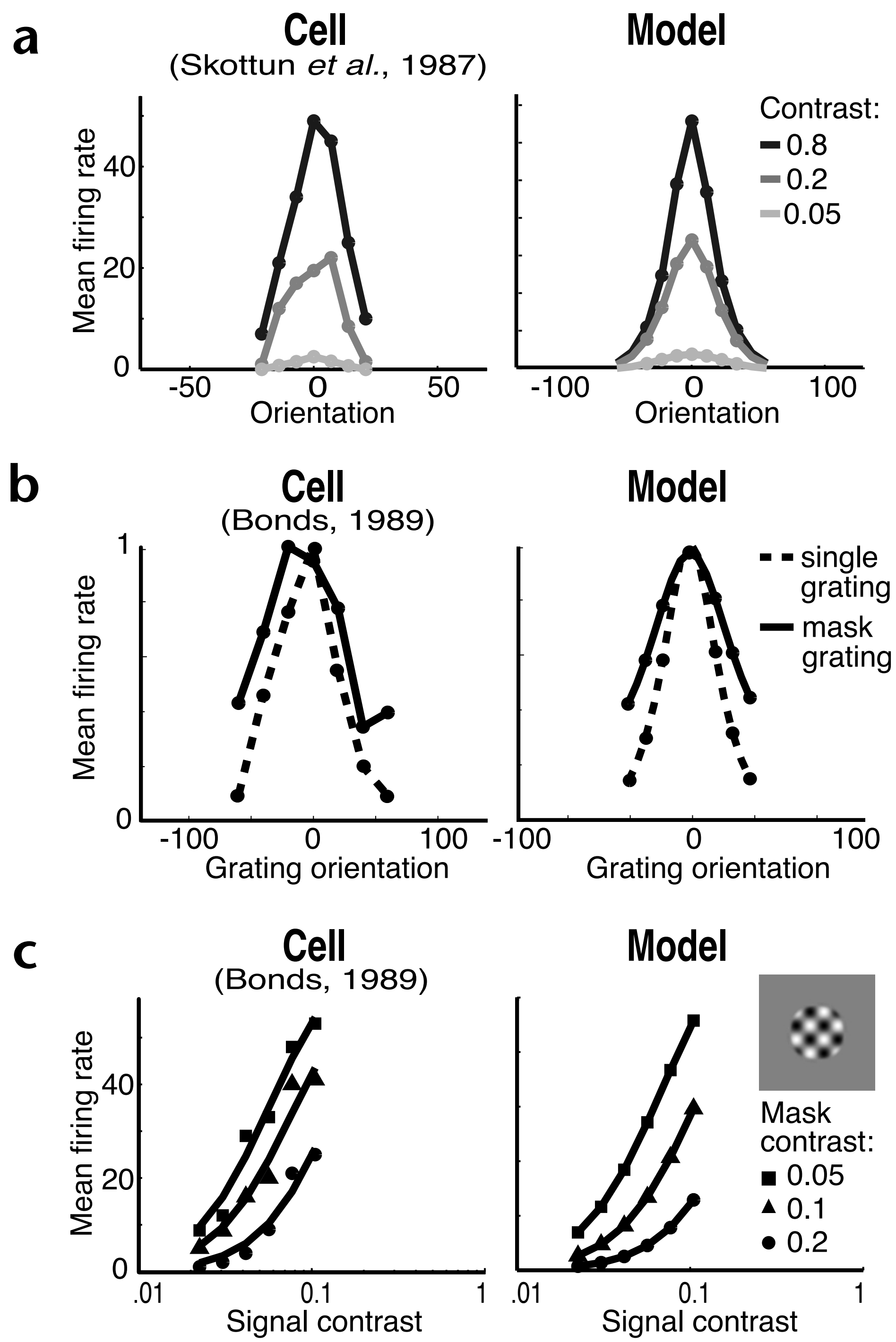
$$var\ (L_1|\,L_2) = wL_2^2 + \sigma^2$$

$$\mathrm{R}_1 = \frac{L_1^2}{wL_2^2 + \sigma^2}$$

$$var\ (L_i|\{L_j, j \in N_i\}) = \sum \mathrm{w}_{ji}\mathrm{L}_j^2 + \sigma^2$$

$$R_i = \frac{L_i^2}{\sum_j \mathrm{w}_{ji}\mathrm{L}_j^2 + \sigma^2}$$

Neurális adatok és GSM



Schwartz & Simoncelli, 2001