

Statisztikai tanulás az idegrendszerben

Probabilisztikus modellek

Orbán Gergő
golab.wigner.mta.hu

elméleti

Introduction

Knowledge representation

Probabilistic models

Bayesian behaviour

Approximate inference I (computer lab)

Vision I

Approximate inference II: Sampling

Measuring priors

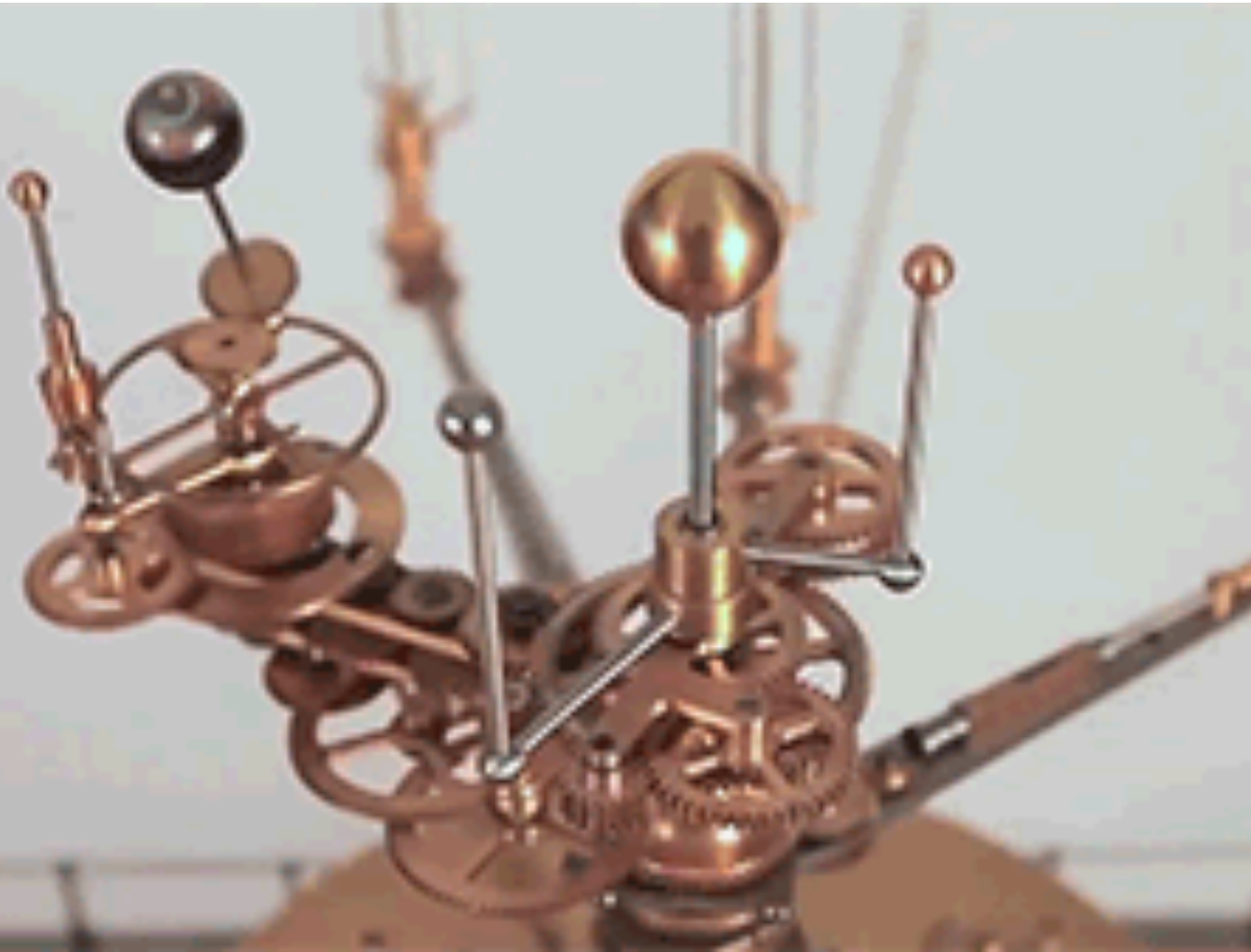
Neural representation of probabilities

Structure learning

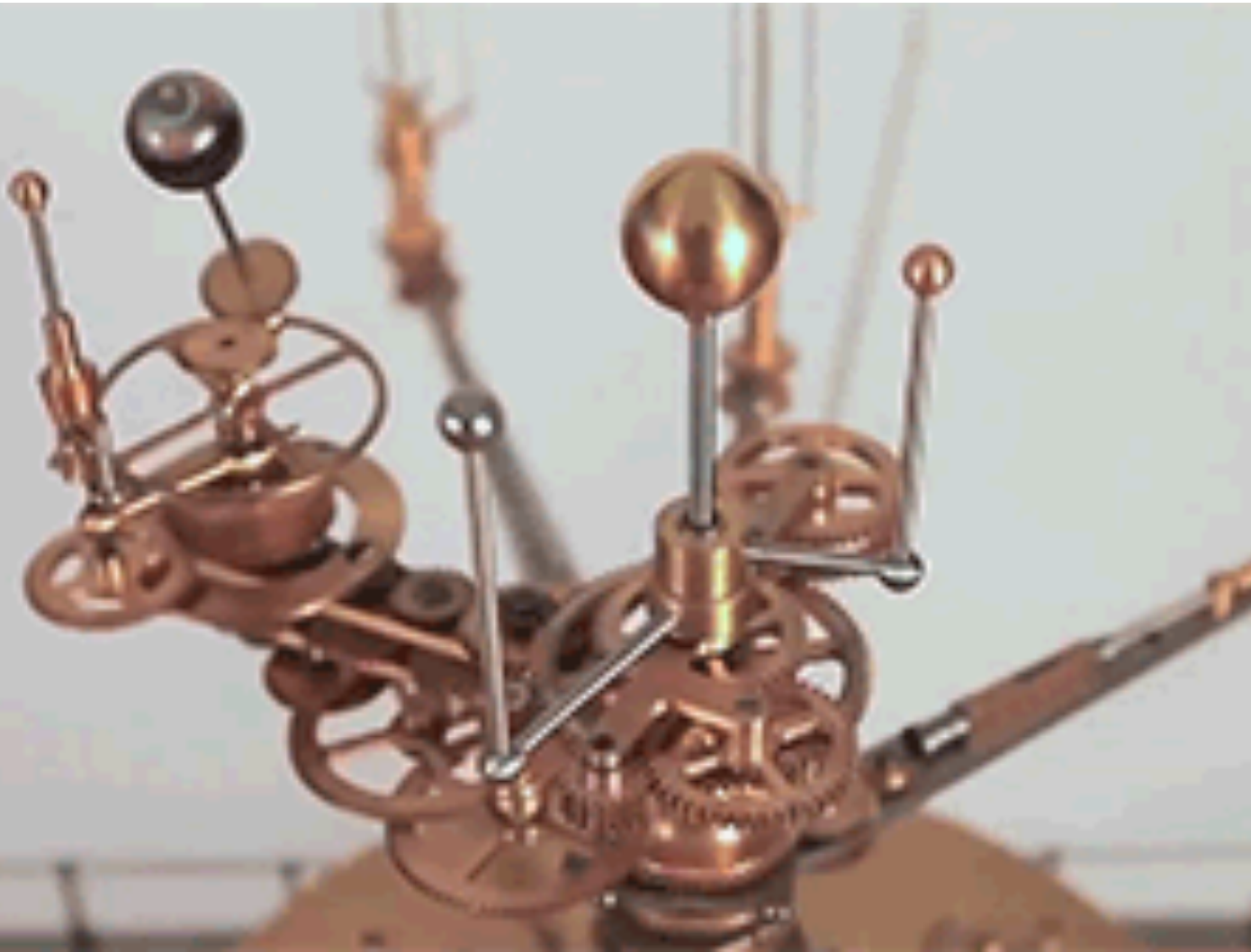
Vision II

Decision making and reinforcement learning

modellalkotás/reprezentáció

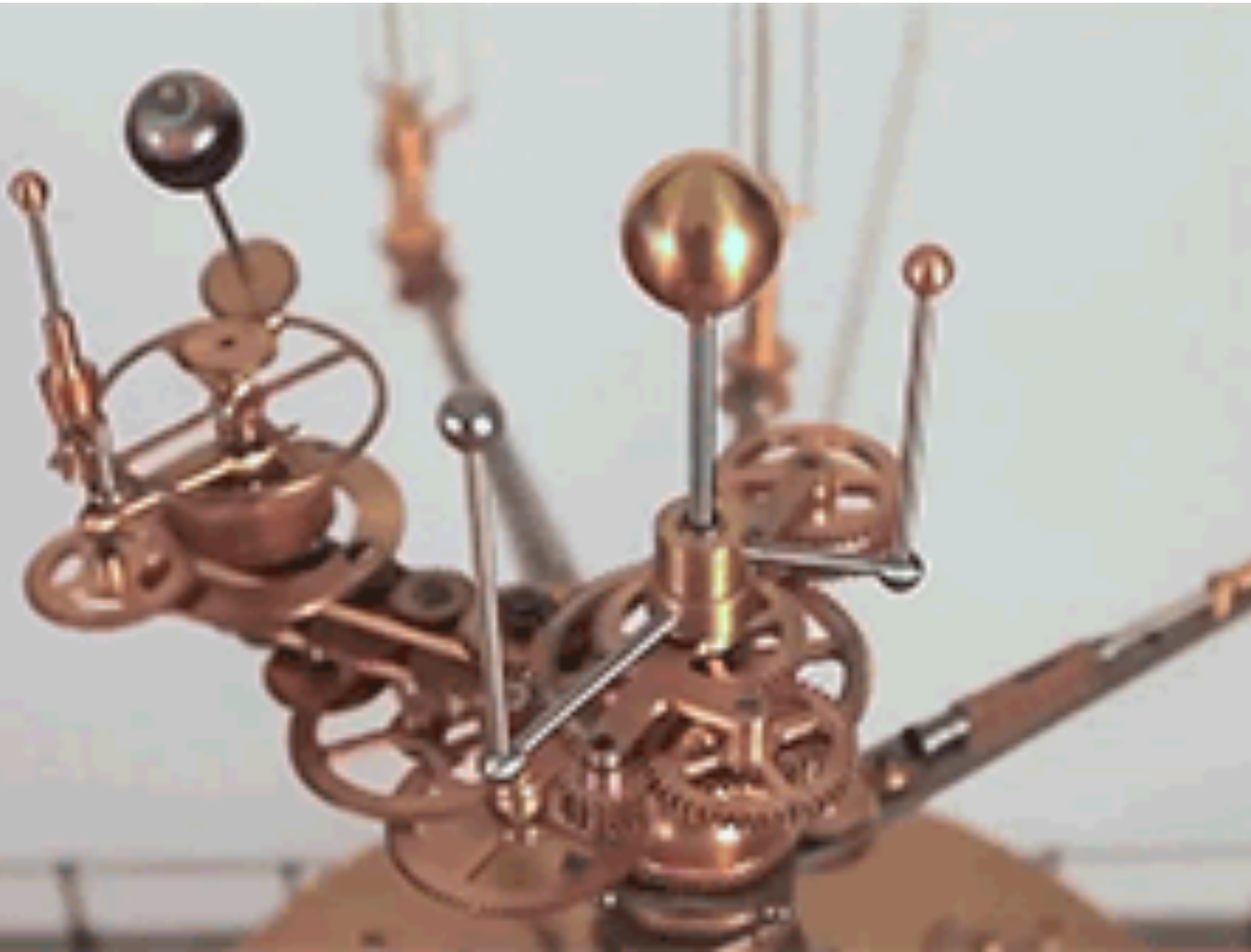


modellalkotás/reprezentáció

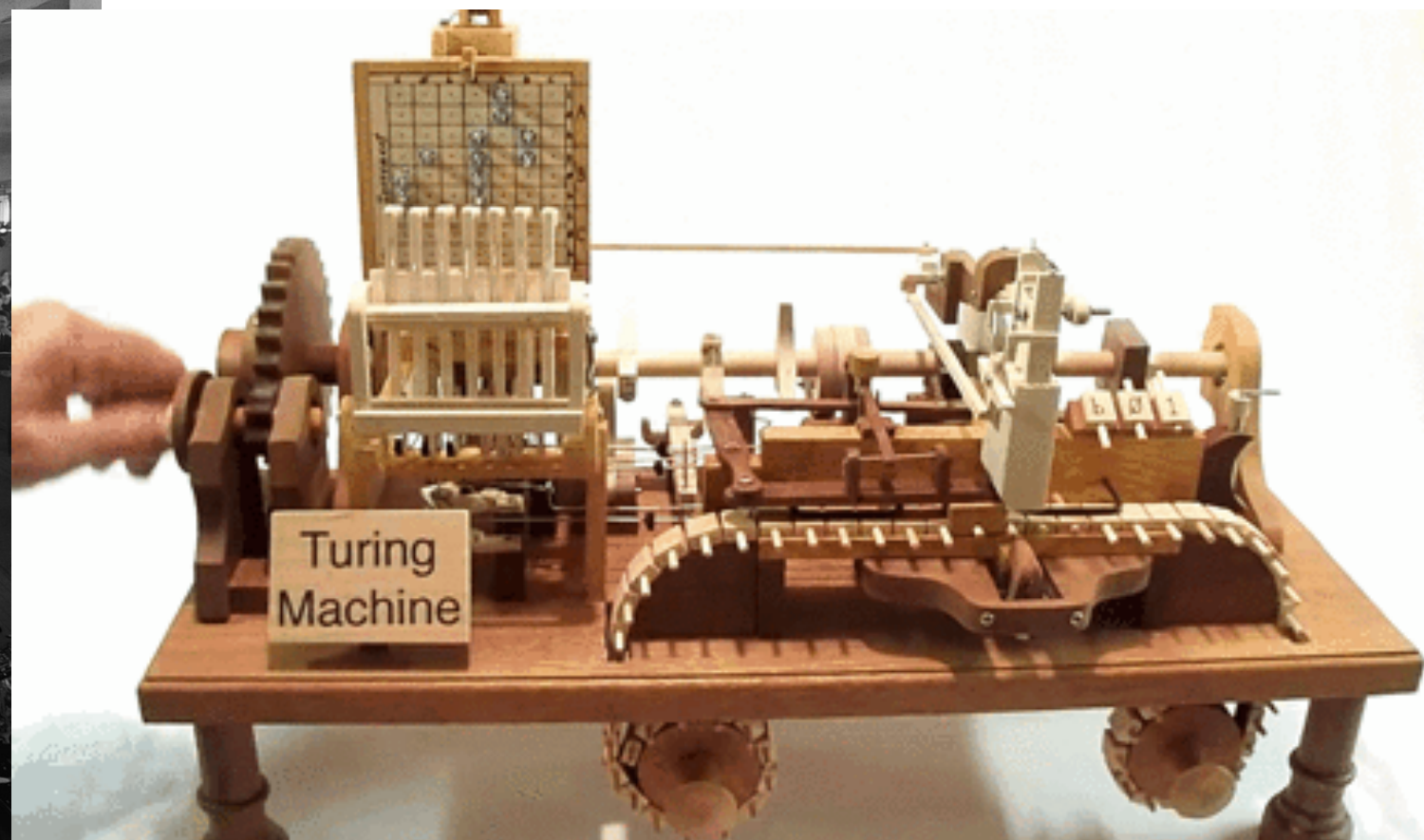
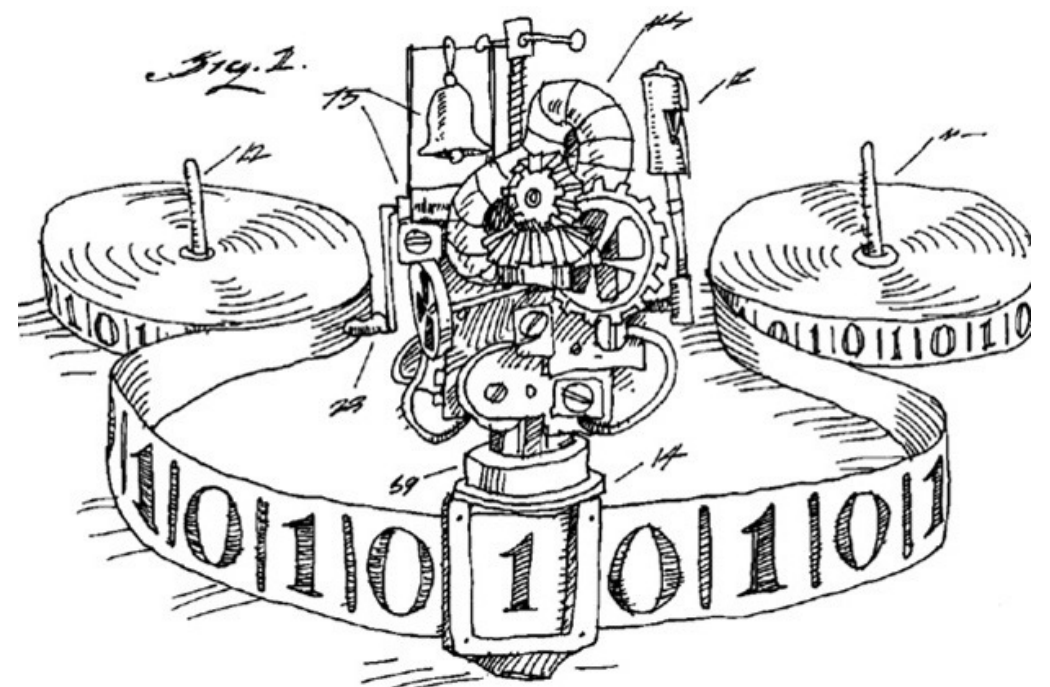
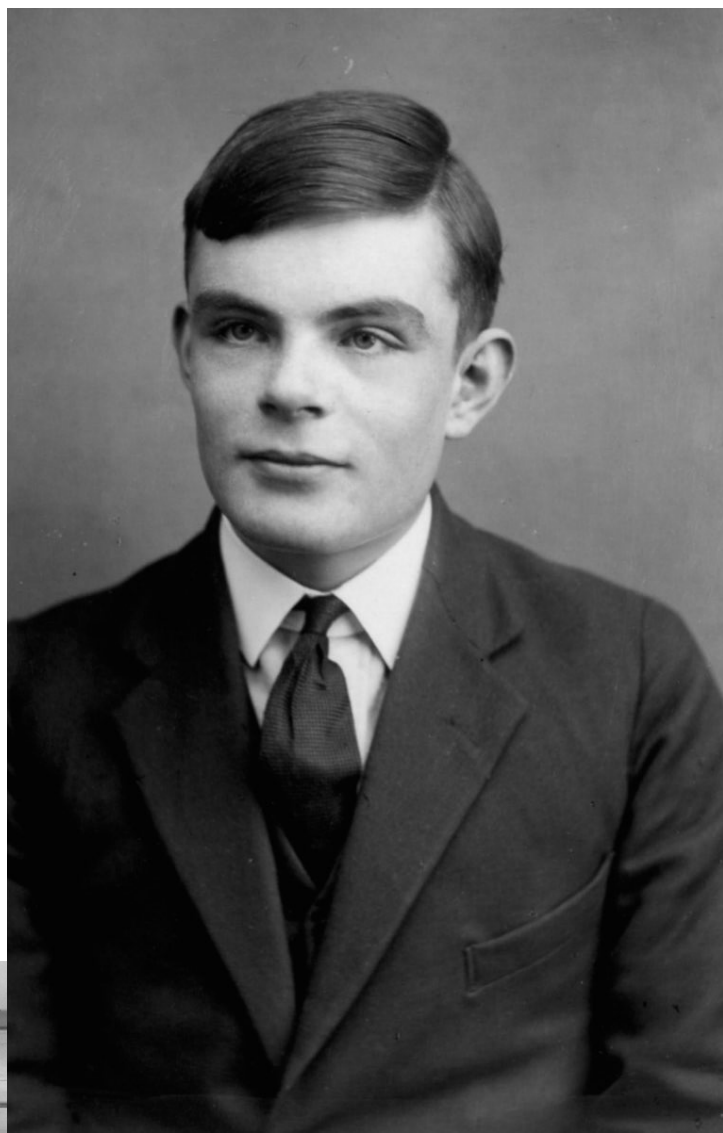


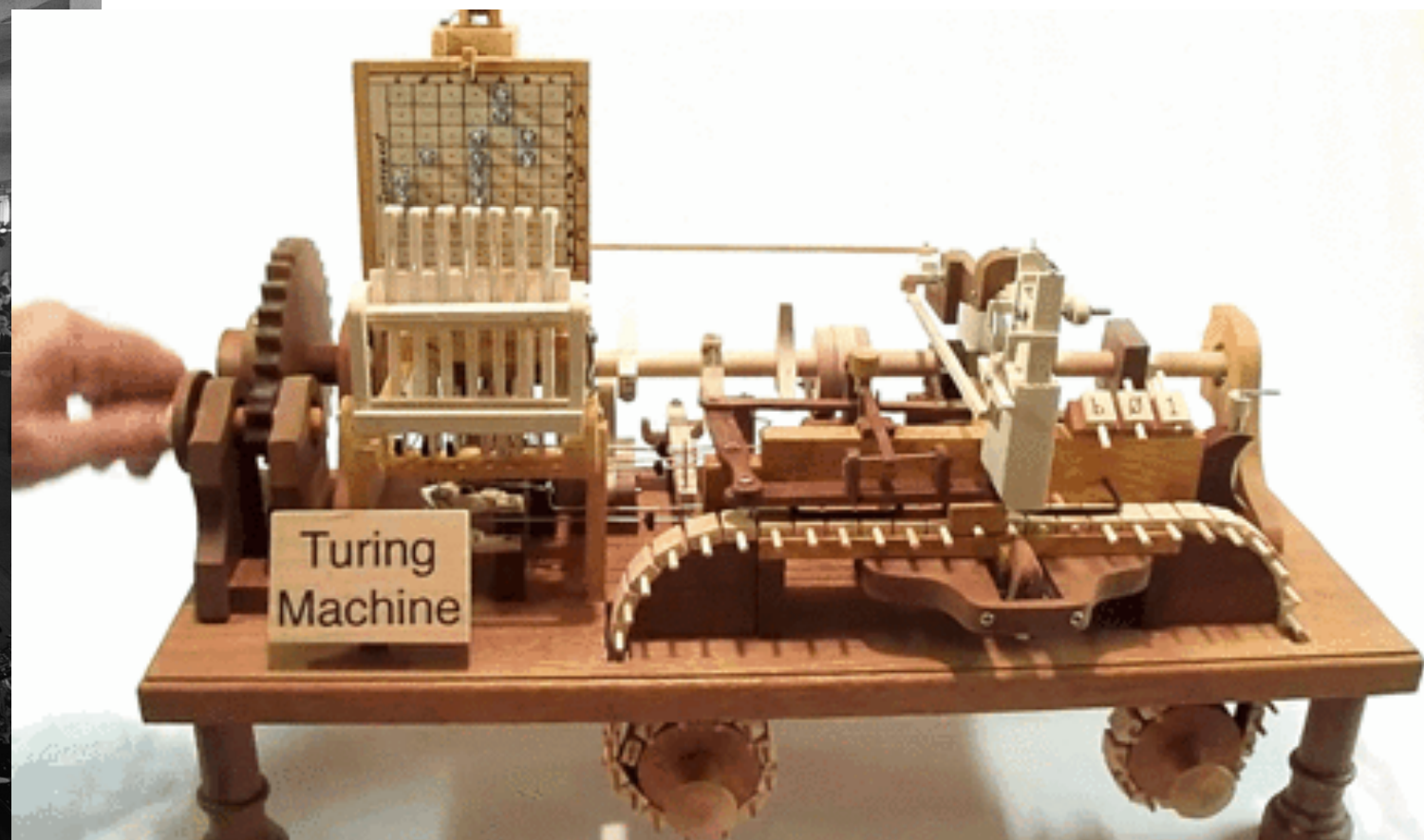
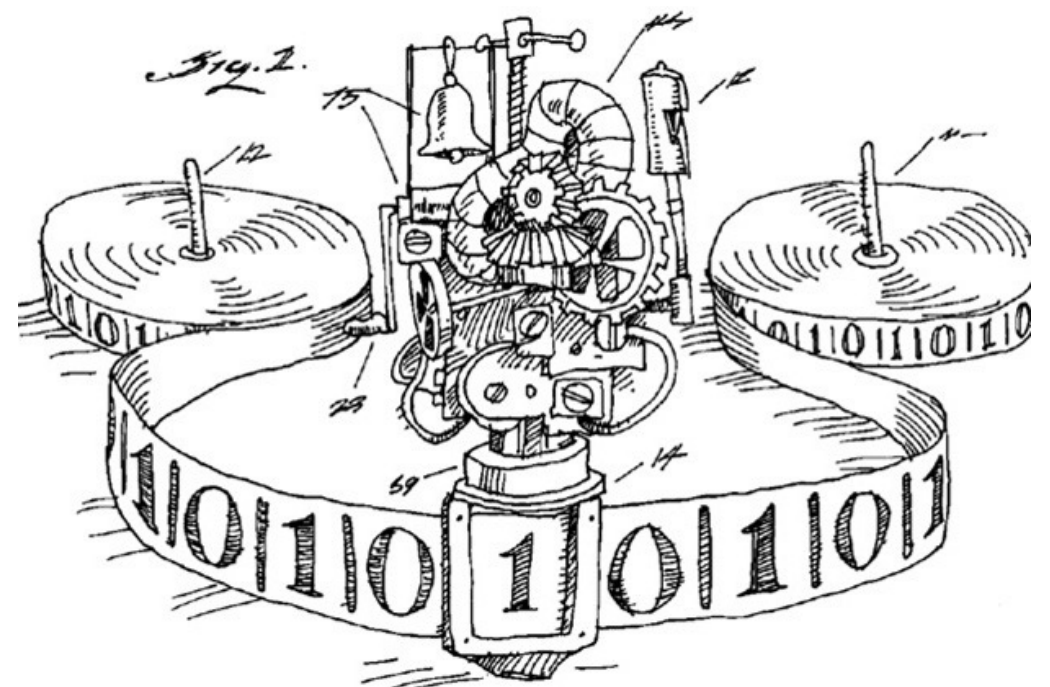
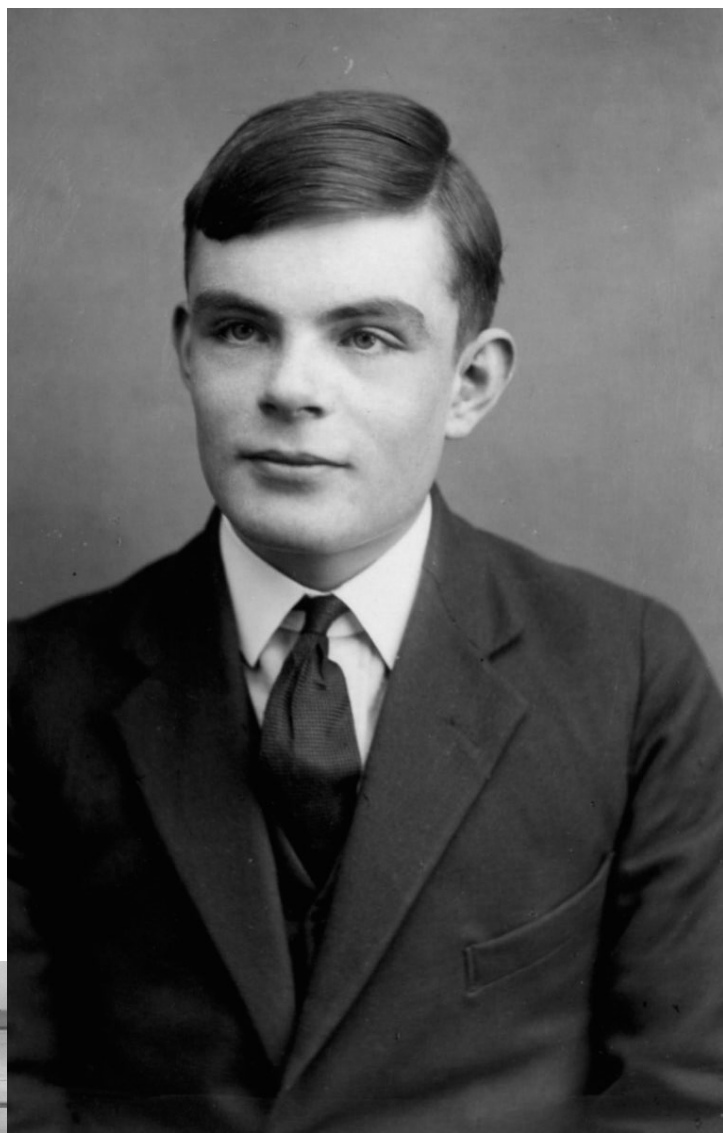
- a rendszer (releváns részeinek) mása a biológiai ágensben

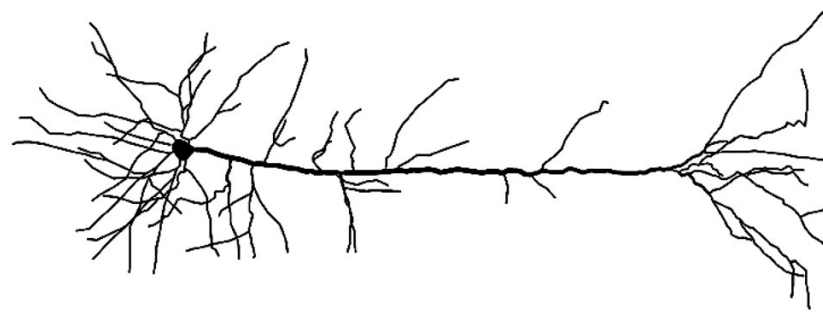
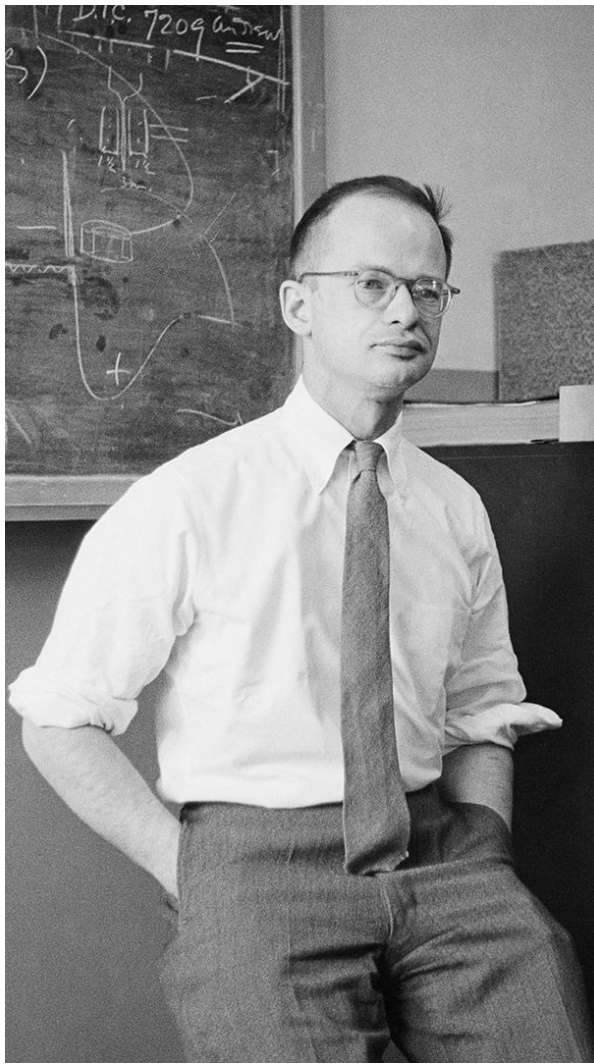
modellalkotás/reprezentáció



- a rendszer (releváns részeinek) mása a biológiai ágensben







A Logical Calculus of Ideas Immanent in Nervous Activity

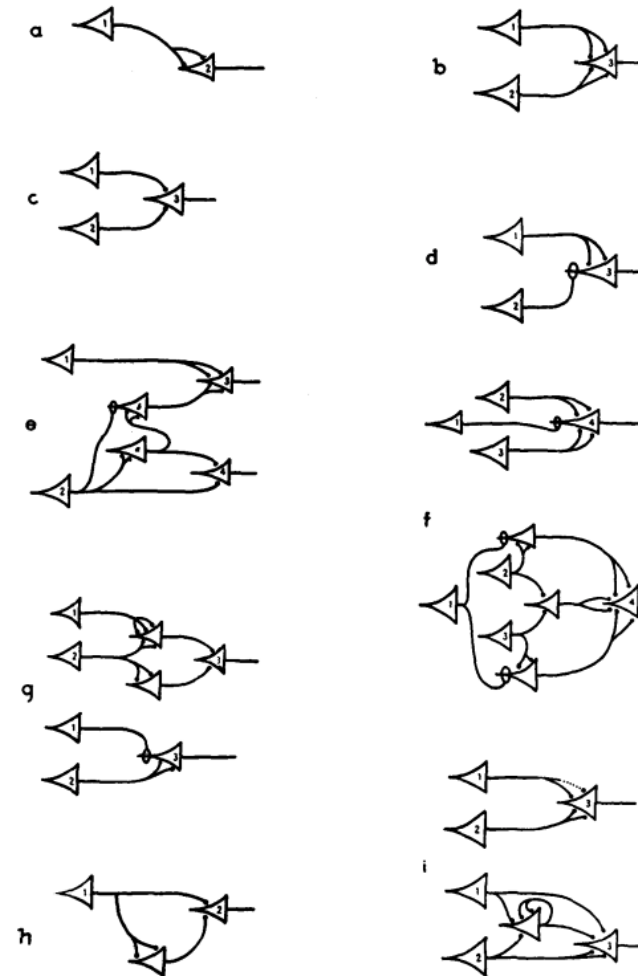


FIGURE 1

Minden **A** egyben **B**

X egy **A**

Tehát **X** is **B**



igazságtáblázat

propozicionális logika

elsőrendű logika

univerzalitás

λ -kalkulus

UTM

kifejezőerő



ha köhög akkor mi a tüdőrák igazságértéke? **eldönthetetlen**

$$K \rightarrow T?$$

köhög	megfázás	tüdőrák	lehetséges?
1	1	1	1
1	1	0	1
1	0	1	1
1	0	0	0
0	1	1	0
0	1	0	0
0	0	1	0
0	0	0	1

$\in \mathbb{R}$

logika

valószínűség

igazságtáblázat



joint probability table

propozicionális logika



i. grafikus modell

elsőrendű logika

.....

univerzalitás

.....

λ -kalkulus



probabilisztikus
programnyelvek

UTM



valószínűségszámítás

- összegszabály
- szorzatszabály

szorzatszabály

$$P(m, k) = P(m)P(k|m)$$

$P(\text{“esik a hó és süt a nap”})$



$P(\text{“esik a hó”})$ **és** $P(\text{“süt a nap ha esik a hó”})$

szorzatszabály

$$P(m, k) = P(m)P(k|m)$$

$P(\text{“esik a hó és süt a nap”})$



$P(\text{“esik a hó”})$ **és** $P(\text{“süt a nap ha esik a hó”})$

lánc-szabály, “és”-szabály

összegszabály

$$P(k) = P(k, m) + P(k, \neg m)$$

$P(\text{“esik a hó”})$



$P(\text{“esik a hó és süt a nap”})$

vagy

$P(\text{“esik a hó és nem süt a nap”})$

összegszabály

$$P(k) = P(k, m) + P(k, \neg m)$$

$P(\text{“esik a hó”})$



$P(\text{“esik a hó és süt a nap”})$

vagy

$P(\text{“esik a hó és nem süt a nap”})$

$$P(x) = \sum_{y' \in \mathbb{Y}} P(x, y')$$

összegszabály

$$P(k) = P(k, m) + P(k, \neg m)$$

$P(\text{“esik a hó”})$



$P(\text{“esik a hó és süt a nap”})$

vagy

$P(\text{“esik a hó és nem süt a nap”})$

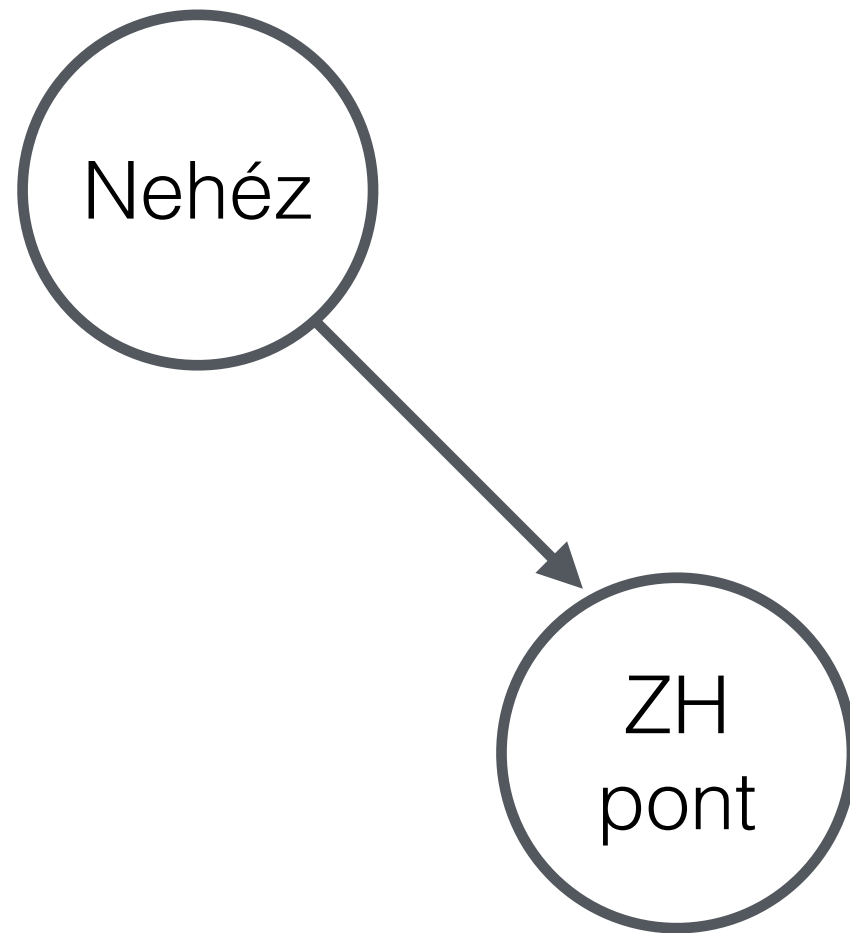
$$P(x) = \sum_{y' \in \mathbb{Y}} P(x, y')$$

marginális valószínűség, “vagy”-szabály

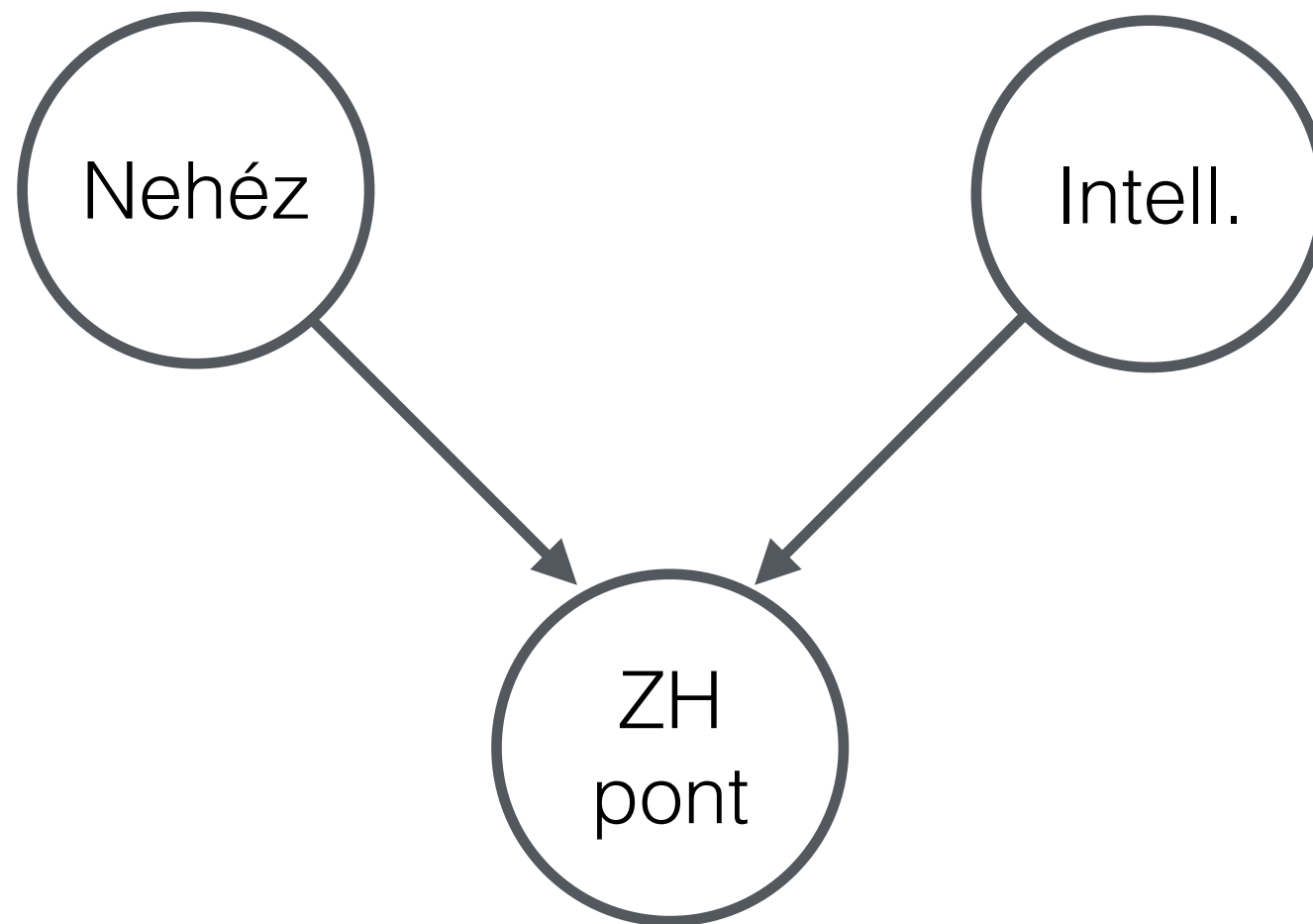
grafikus modell



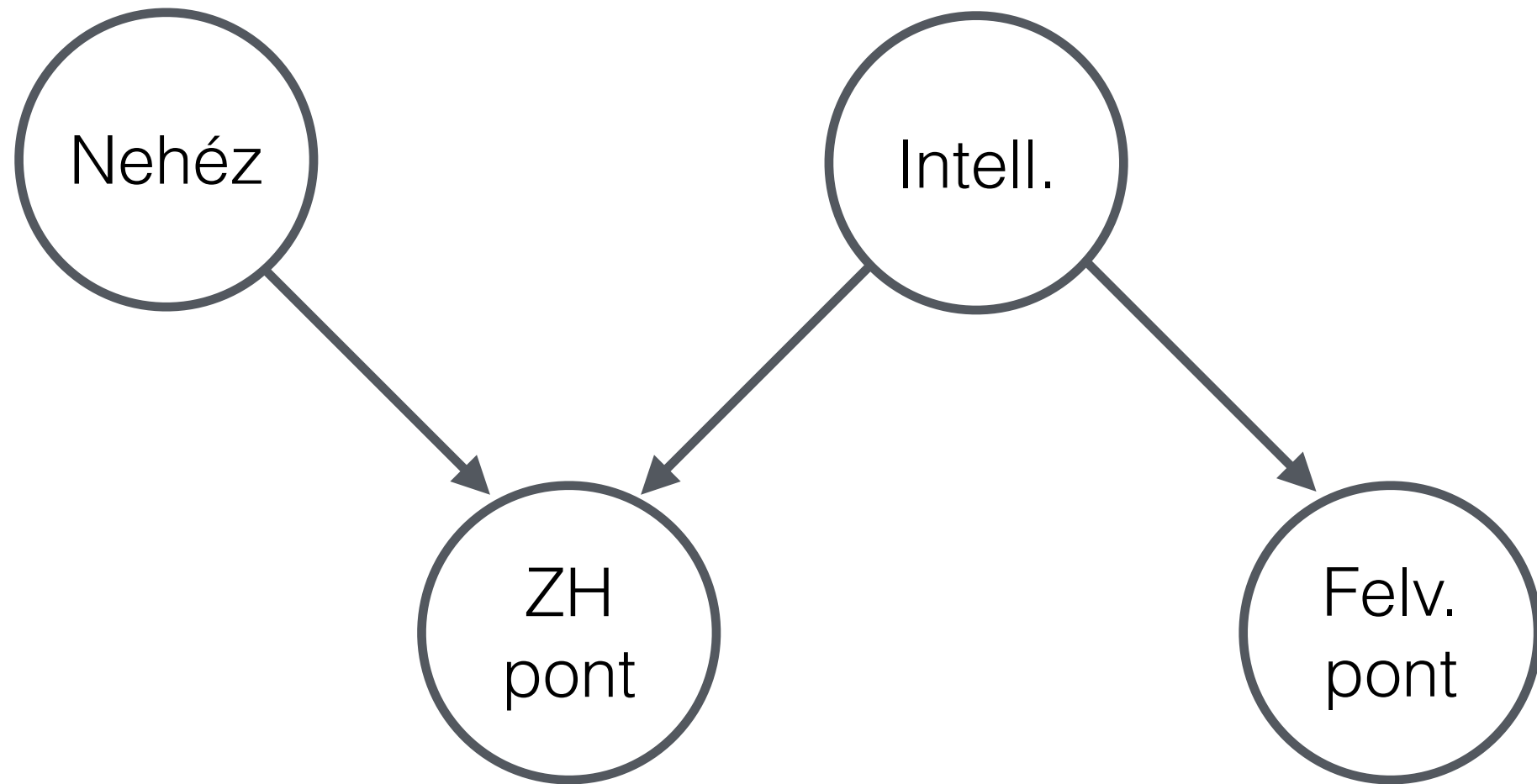
grafikus modell



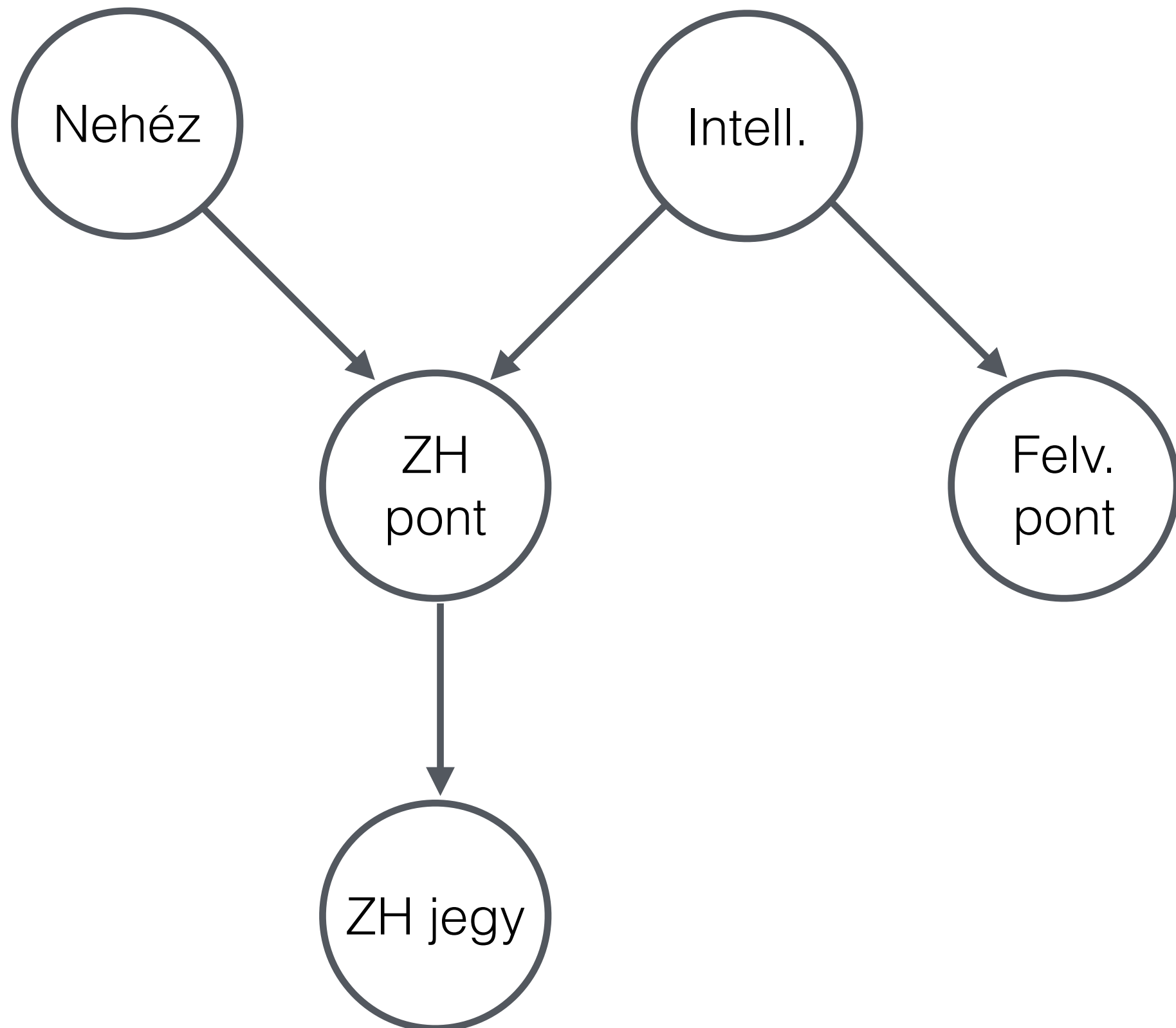
grafikus modell



grafikus modell



grafikus modell



adat

Nehézség	Intelligencia	ZH pont	Felvételi pont	ZH jegy
----------	---------------	---------	----------------	---------

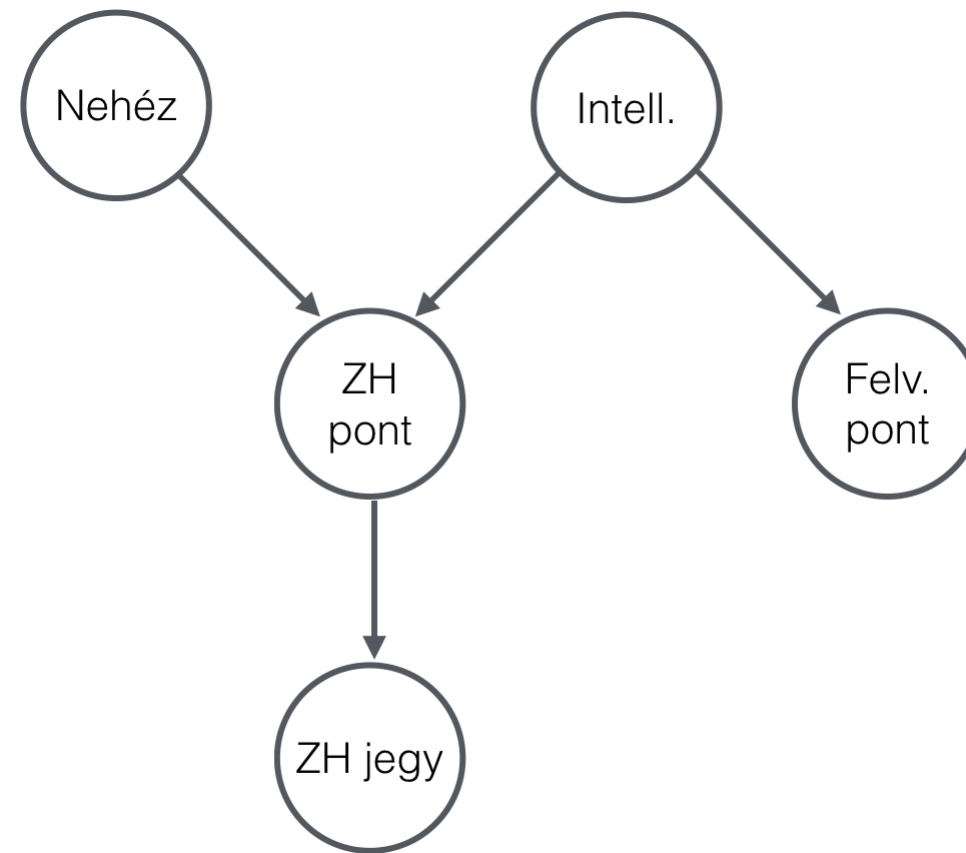
0.7	144	87	134 444	5
-----	-----	----	---------	---

0.9	135	88	97 543	5
-----	-----	----	--------	---

0.6	153	91	153 000	4
-----	-----	----	---------	---

0.9	101	83	92 441	4
-----	-----	----	--------	---

hatásterjedés

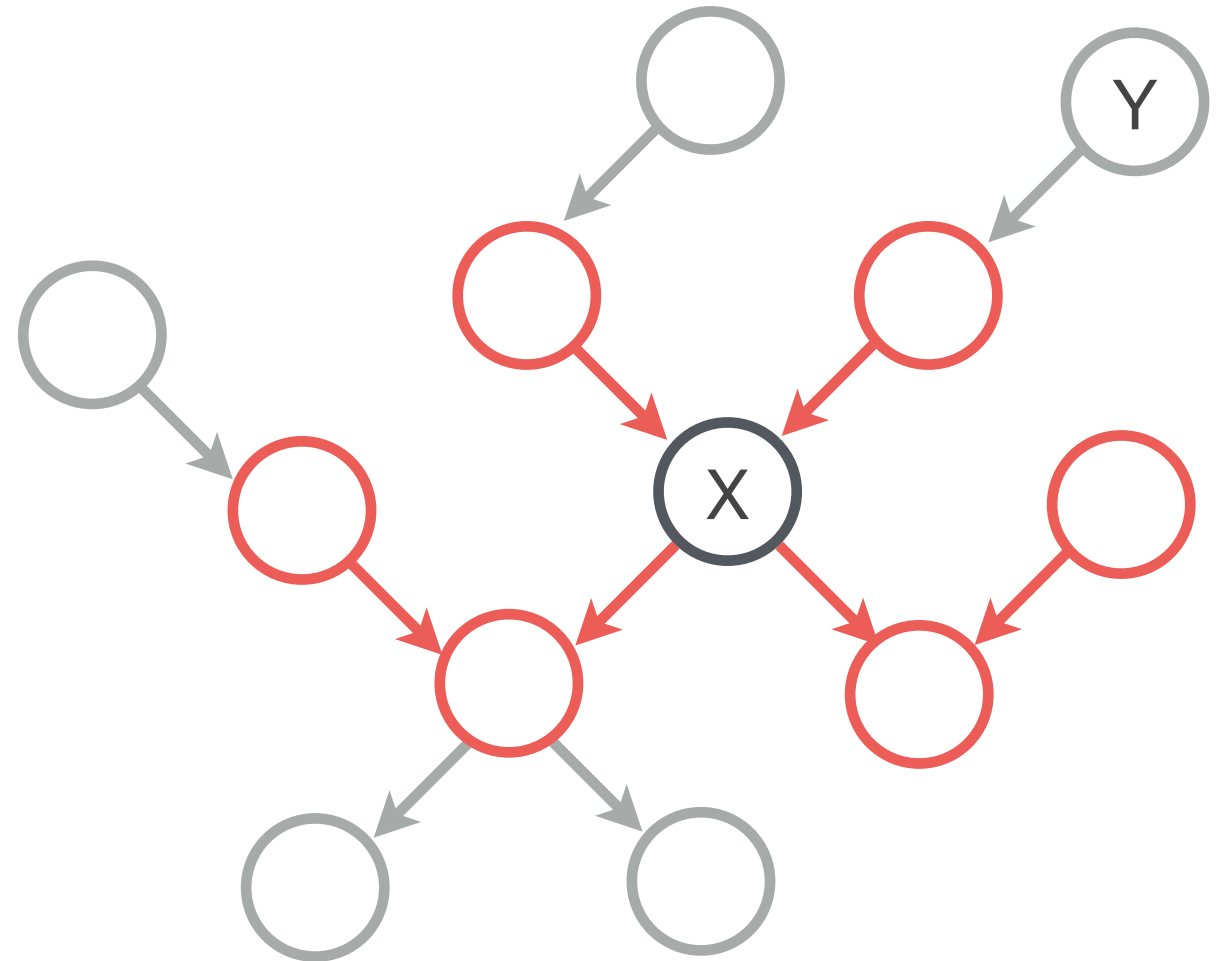


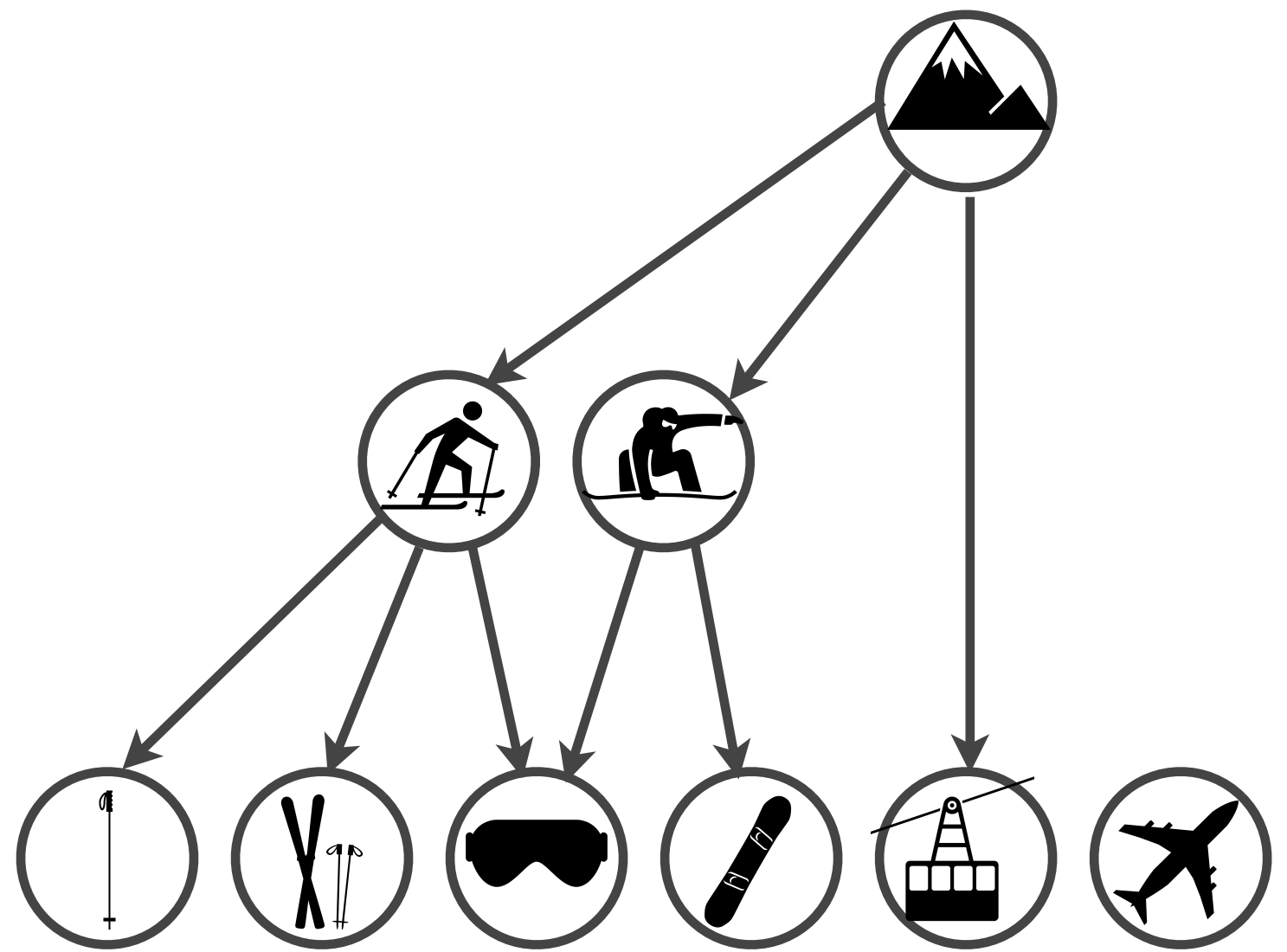
```
nehez = sample(p(nehez))
intell = sample(p(intell))
pont = sample(p(pont | nehez, intell))
felv = sample(p(felv | intell))
jegy = sample(p(jegy | pont))
```

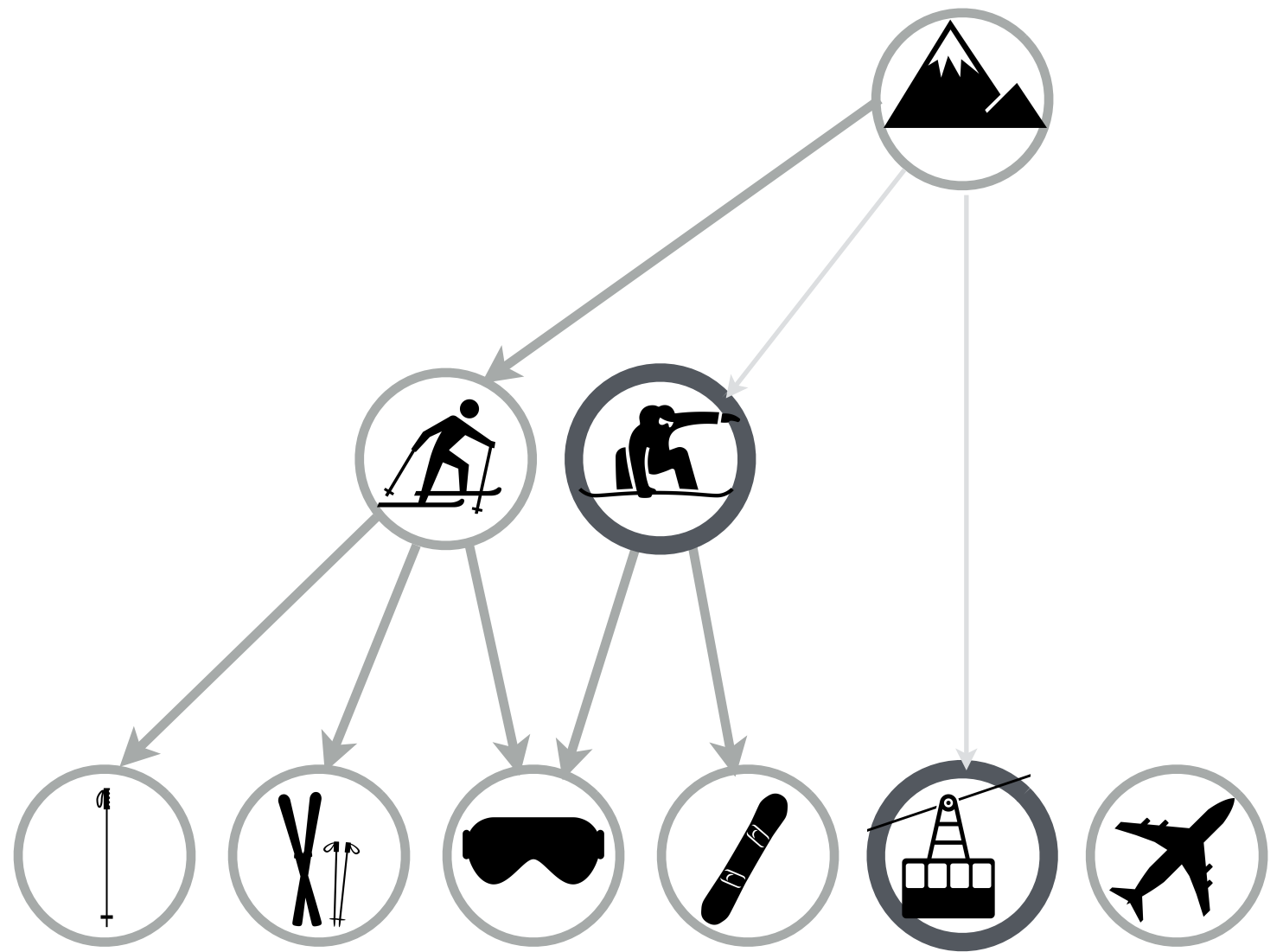
Markov takaró

$$\forall Y : X \perp Y \mid MB(X)$$

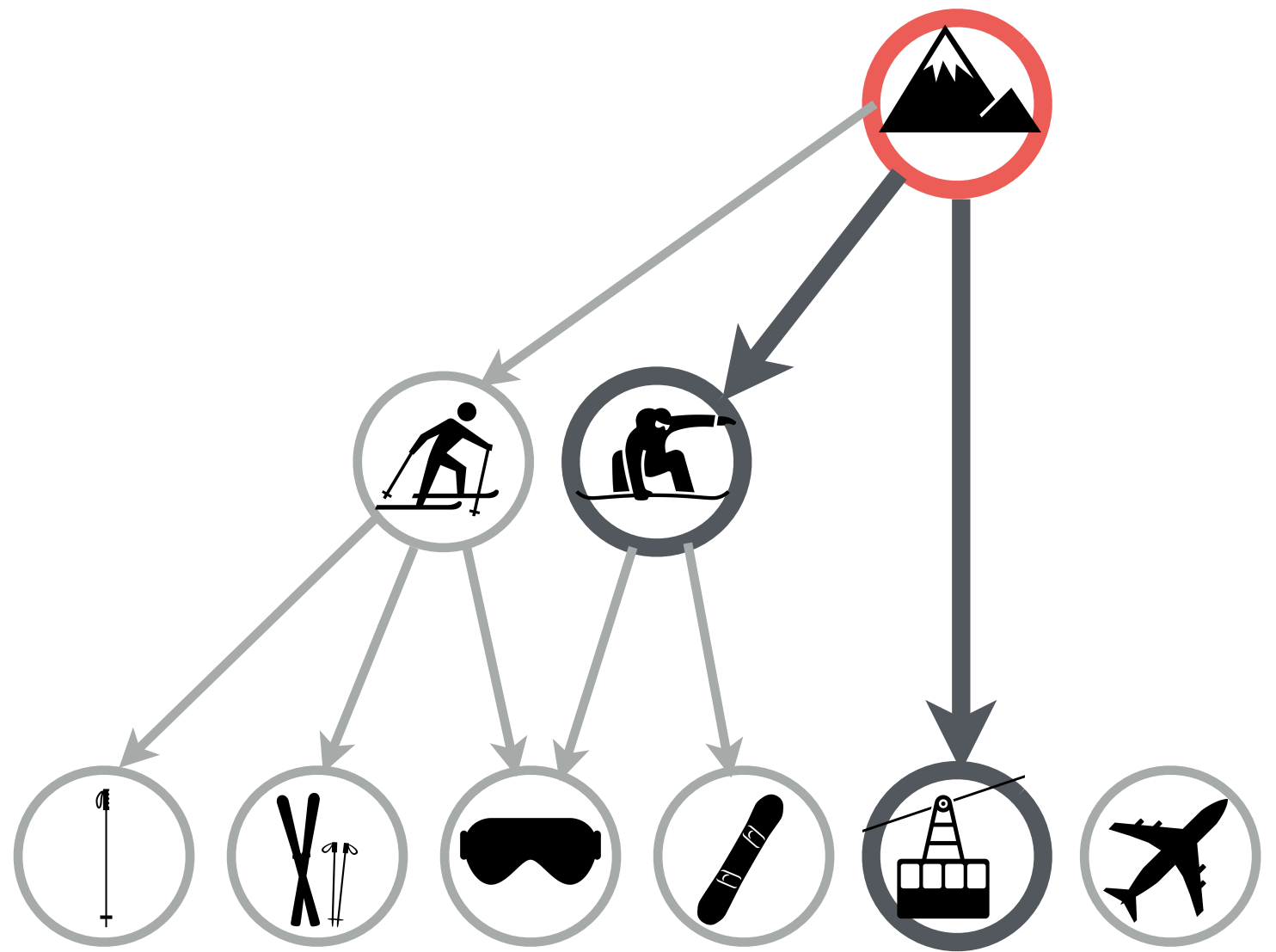
- szülők
- gyerekek
- gyerekek szülei





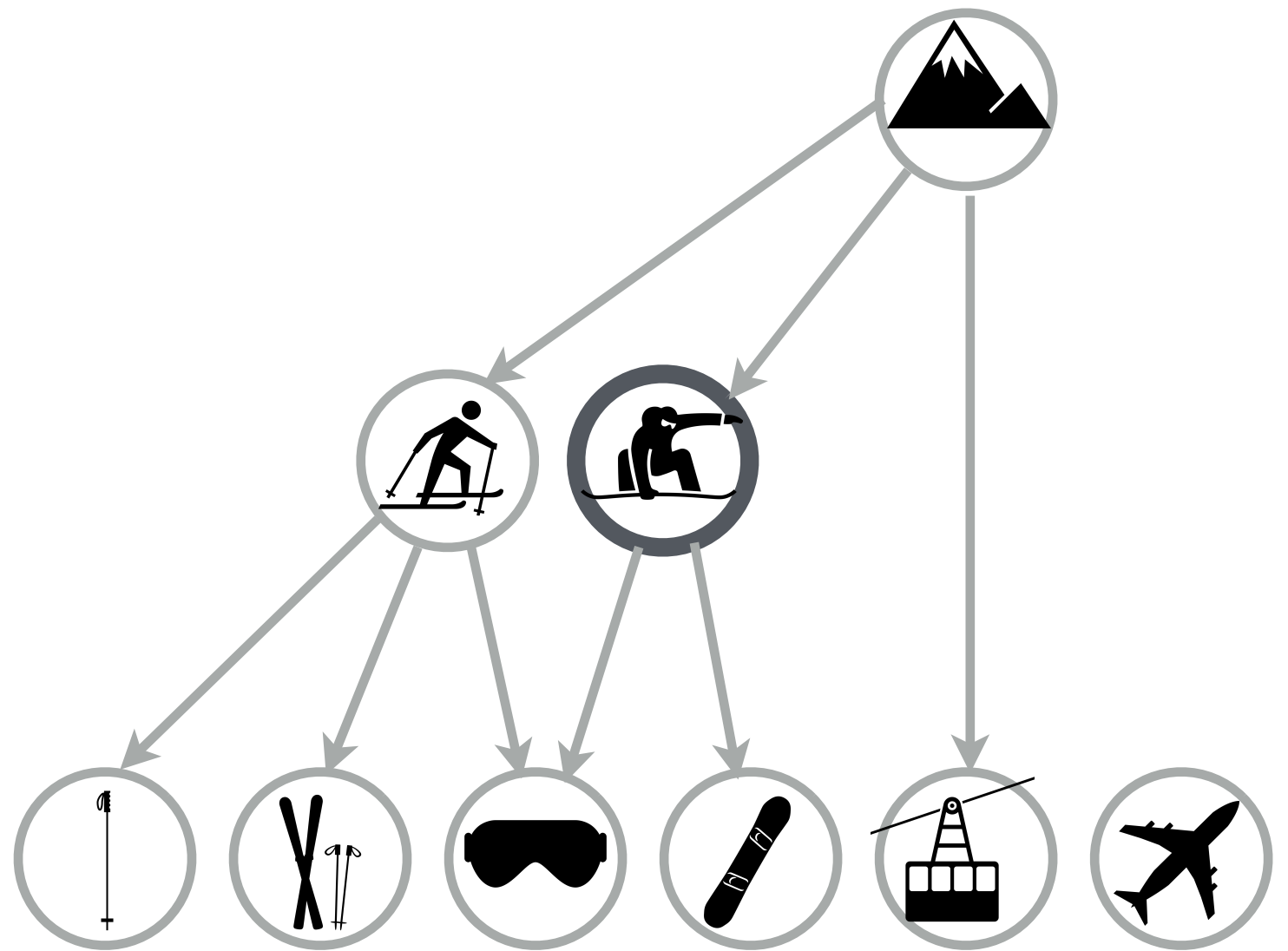


$$P(\text{Snowboarder}) \not\sim P(\text{Lift})$$



$$P(\text{Snowboarder}) \not\perp P(\text{Ski Lift Cabin})$$

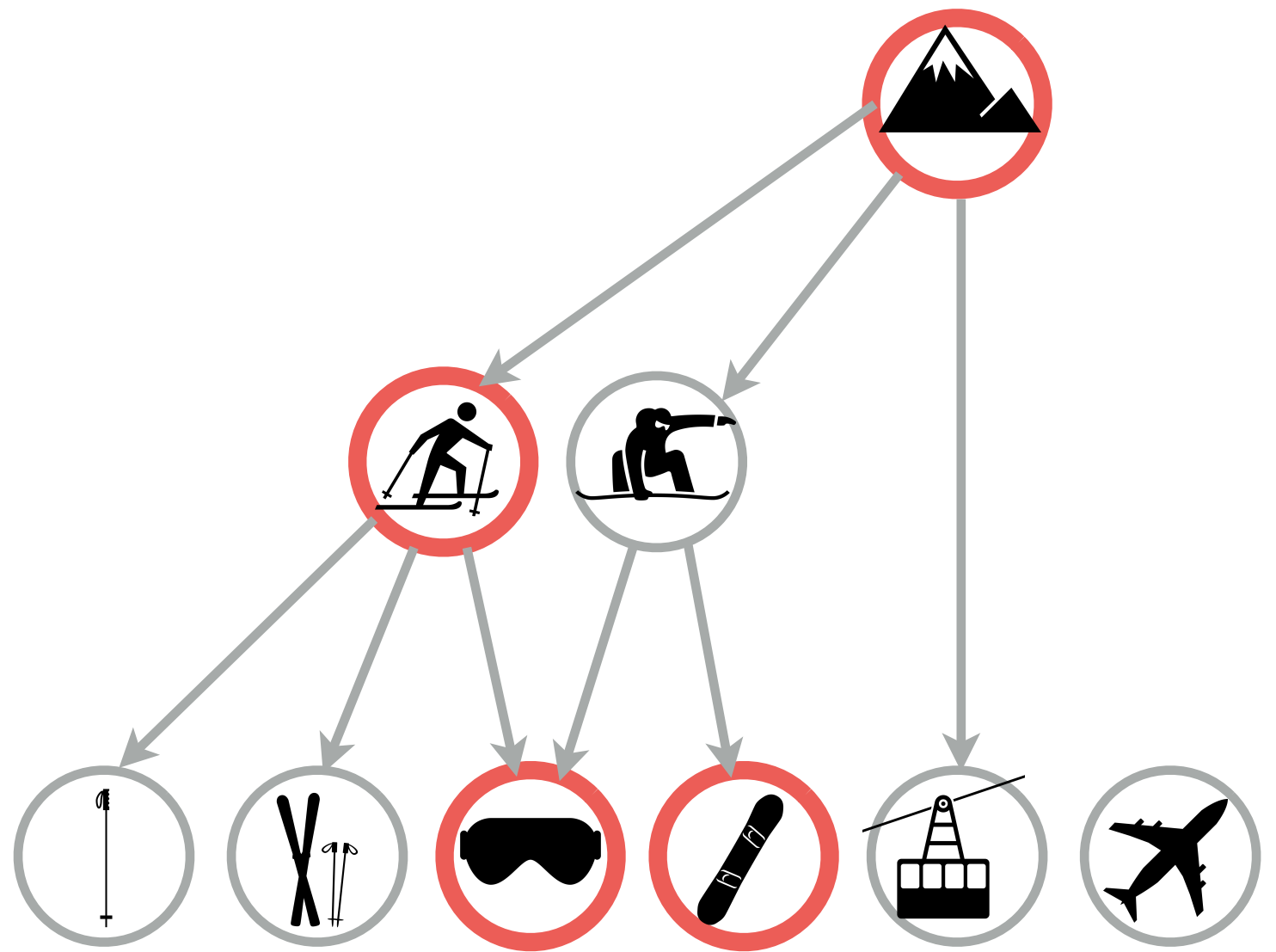
$$P(\text{Snowboarder}) \perp P(\text{Ski Lift Cabin}) \mid \text{Mountain}$$



$$P(\text{snowboarder}) \not\perp P(\text{ski lift})$$

$$P(\text{snowboarder}) \perp P(\text{ski lift}) \mid \text{mountain}$$

$$MB(\text{snowboarder}) =$$

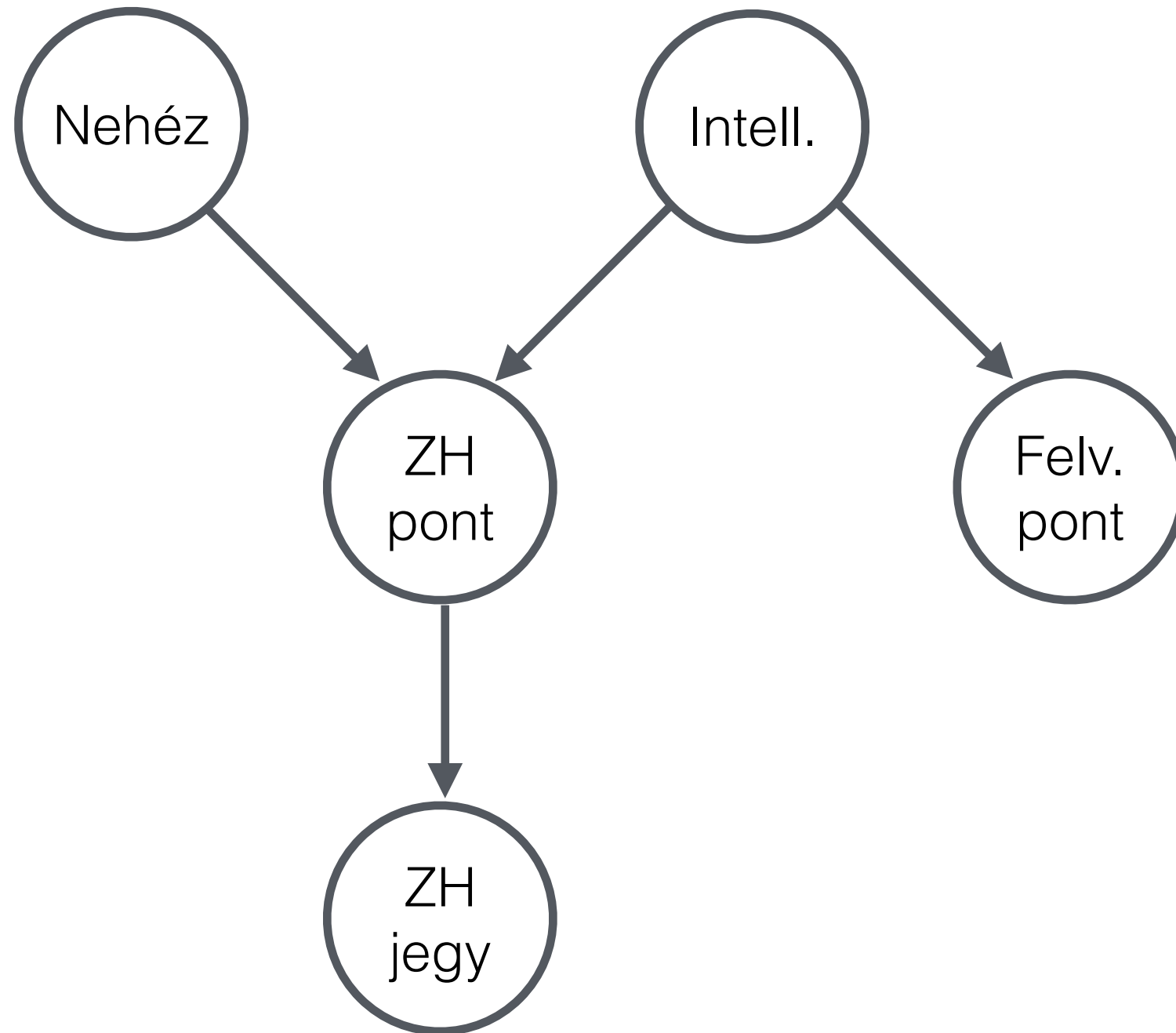


$$P(\text{Snowboarder}) \not\perp P(\text{Lift})$$

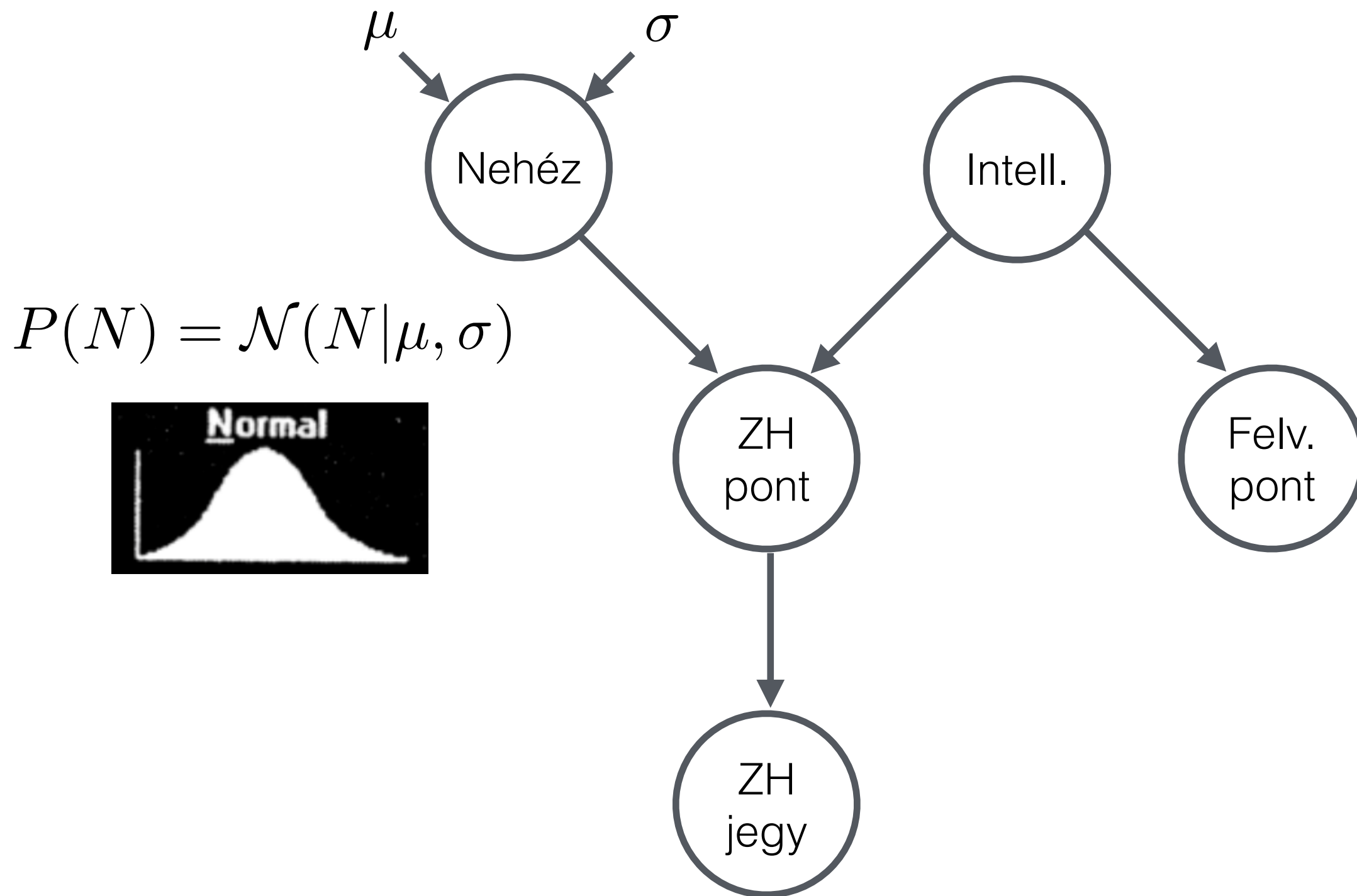
$$P(\text{Snowboarder}) \perp P(\text{Lift}) \mid \text{Mountain}$$

$$MB(\text{Snowboarder}) =$$

grafikus modell építés

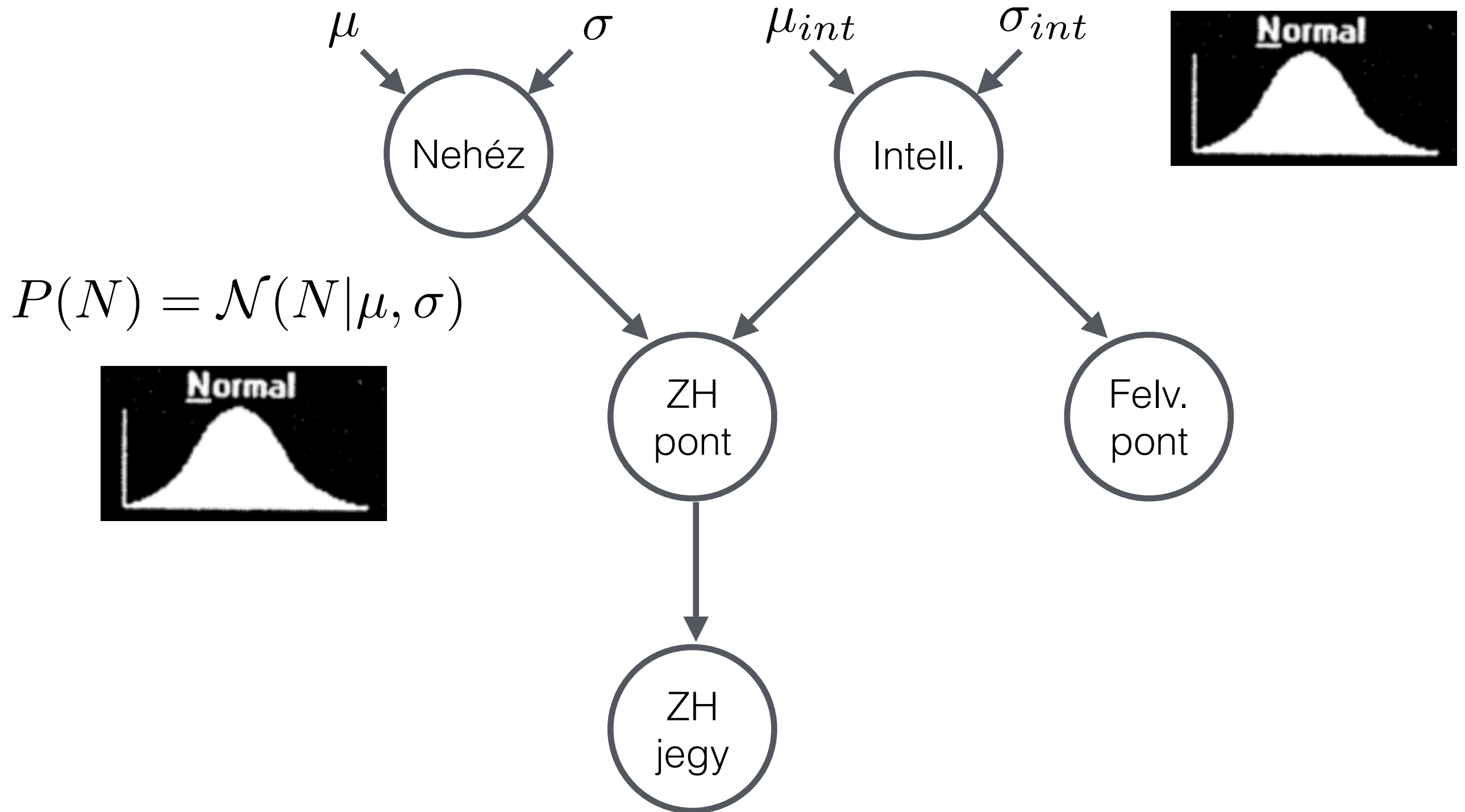


grafikus modell építés



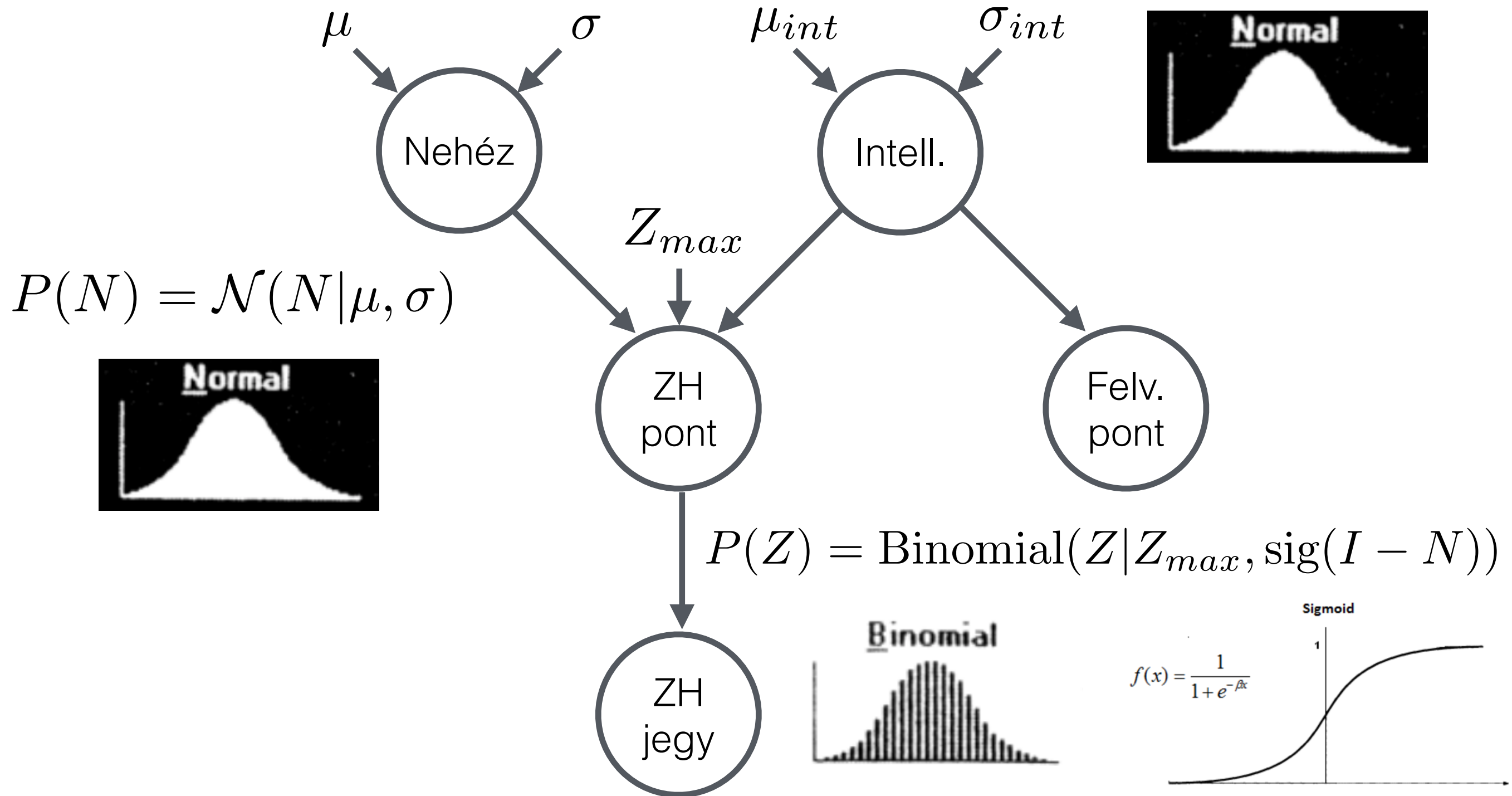
grafikus modell építés

$$P(I) = \mathcal{N}(I|\mu_{int}, \sigma_{int})$$



grafikus modell építés

$$P(I) = \mathcal{N}(I|\mu_{int}, \sigma_{int})$$



Házi feladat

Graphical models vs probability tables

Assignment The following probabilistic model is learned in Japan about occurrence of earthquakes, public radio announcements on tsunami alerts, and car alarms setting off

earthquake	radio announcement	alarm	P(E,R,A)	
1	1	1	0.036	We would like to answer the following questions: *What is the probability of earthquakes to happen? *Is the radio announcement independent of the alarm turning on? *If not, can a conditional independence relationship be established? *Can you write up a graphical model of this data? *What are the parameters of the graphical model?
1	1	0	0.054	
1	0	1	0.004	
1	0	0	0.006	
0	1	1	0.00045	
0	1	0	0.00855	
0	0	1	0.04455	
0	0	0	0.84645	

bayes-i inferencia

mi az amit megfigyelünk?

mi az amit megfigyelünk?

- fotonok becsapódása

mi az amit megfigyelünk?

- fotonok becsapódása
- levegő gyors rezgései

mi az amit megfigyelünk?

- fotonok becsapódása
- levegő gyors rezgései
- hőmérséklet ingadozása

mi az amit megfigyelünk?

- fotonok becsapódása
- levegő gyors rezgései
- hőmérséklet ingadozása
- bizonyos molekulák

mi az amit megfigyelünk?

- fotonok becsapódása
- levegő gyors rezgései
- hőmérséklet ingadozása
- bizonyos molekulák

mire vagyunk kíváncsiak?

mi az amit megfigyelünk?

- fotonok becsapódása
- levegő gyors rezgései
- hőmérséklet ingadozása
- bizonyos molekulák

mire vagyunk kíváncsiak?

- milyen tárgyak vannak körülöttem

mi az amit megfigyelünk?

- fotonok becsapódása
- levegő gyors rezgései
- hőmérséklet ingadozása
- bizonyos molekulák

mire vagyunk kíváncsiak?

- milyen tárgyak vannak körülöttem
- milyen messze

mi az amit megfigyelünk?

- fotonok becsapódása
- levegő gyors rezgései
- hőmérséklet ingadozása
- bizonyos molekulák

mire vagyunk kíváncsiak?

- milyen tárgyak vannak körülöttem
- milyen messze
- kik vannak körülöttem

mi az amit megfigyelünk?

- fotonok becsapódása
- levegő gyors rezgései
- hőmérséklet ingadozása
- bizonyos molekulák

mire vagyunk kíváncsiak?

- milyen tárgyak vannak körülöttem
- milyen messze
- kik vannak körülöttem
- mire gondolnak

mi az amit megfigyelünk?

- fotonok becsapódása
- levegő gyors rezgései
- hőmérséklet ingadozása
- bizonyos molekulák

mire vagyunk kíváncsiak?

- milyen tárgyak vannak körülöttem
- milyen messze
- kik vannak körülöttem
- mire gondolnak
- mik a fizika törvényei

mi az amit megfigyelünk?

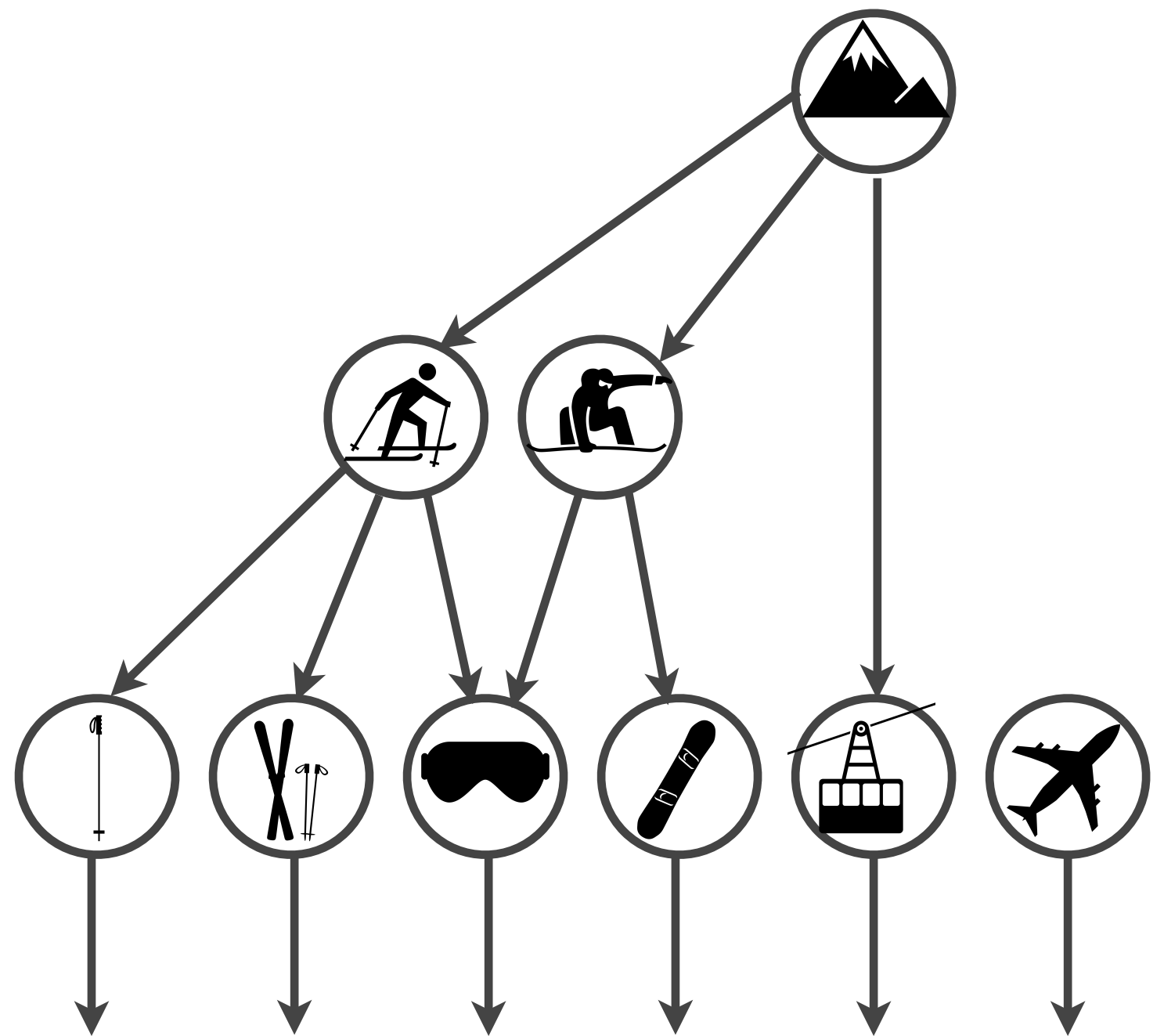
- fotonok becsapódása
- levegő gyors rezgései
- hőmérséklet ingadozása
- bizonyos molekulák

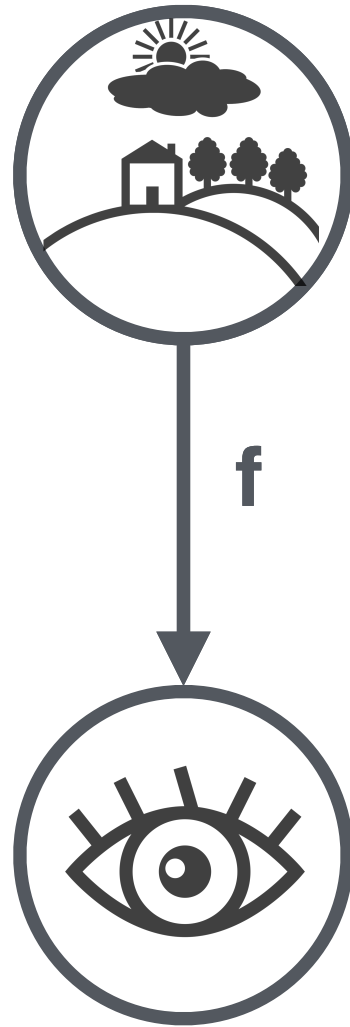
inferencia

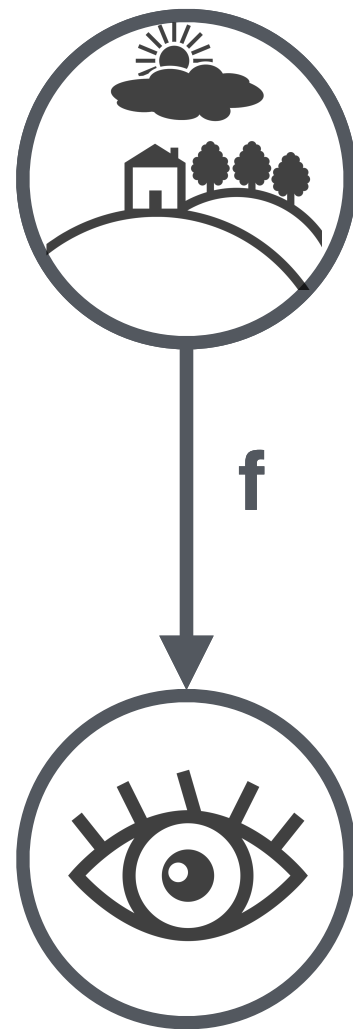


mire vagyunk kíváncsiak?

- milyen tárgyak vannak körülöttem
- milyen messze
- kik vannak körülöttem
- mire gondolnak
- mik a fizika törvényei



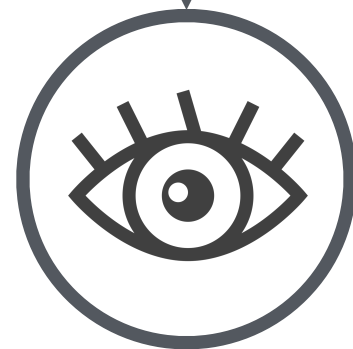




generatív
folyamat



f



J

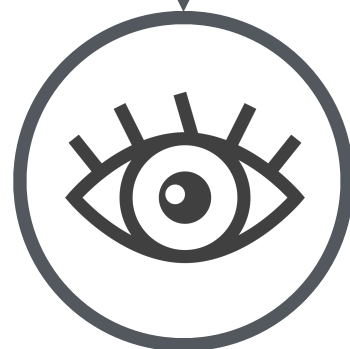


generatív
folyamat

inverz
inferencia



f



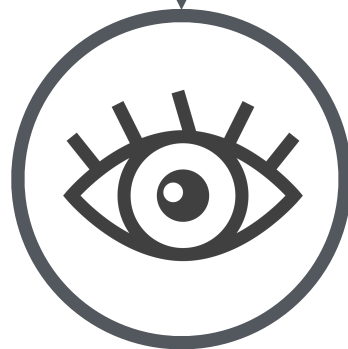
f^{-1}



generatív
folyamat



$P(o|h)$

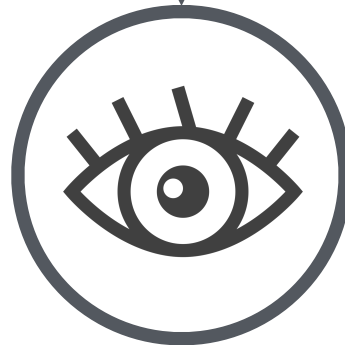


$P(h|o)$





$$P(o|h)$$



$$P(h|o)$$

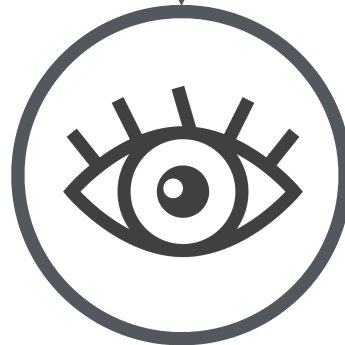


ha ilyen lenne a világ
akkor mit figyelnénk
meg?



$$P(o|h)$$

ha ilyen lenne a világ
akkor mit figyelnénk
meg?



$$P(h|o)$$

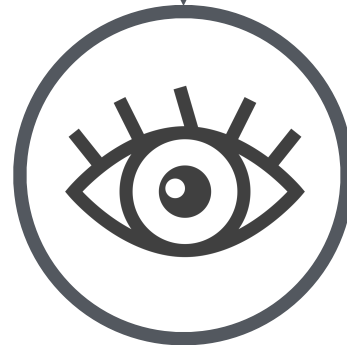
ha ezt figyeljük meg
akkor milyen a világ?



- forward probability
- generatív irány
- prediktív irány
- “szimulátor”



$$P(o|h)$$



$$P(h|o)$$



ha ilyen lenne a világ
akkor mit figyelnénk
meg?

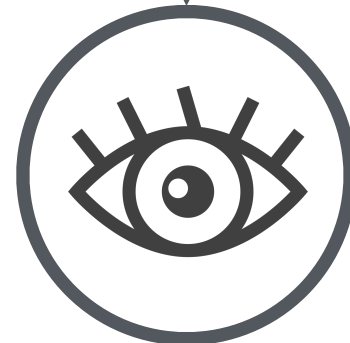
ha ezt figyeljük meg
akkor milyen a világ?

- forward probability
- generatív irány
- prediktív irány
- “szimulátor”

- inverse probability
- Bayes-i inferencia
- modell inverzió



$$P(o|h)$$



$$P(h|o)$$

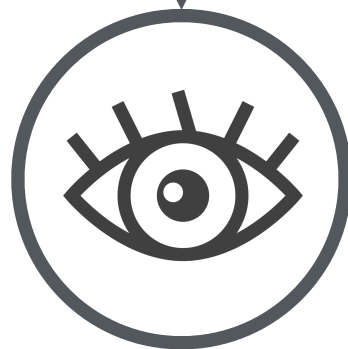


ha ilyen lenne a világ
akkor mit figyelnénk
meg?

ha ezt figyeljük meg
akkor milyen a világ?



$$P(o|h)$$



$$P(h|o) = \frac{P(o|h)P(h)}{P(o)}$$



$$P(h|o) = \frac{P(o|h) \overbrace{P(h)}^{\text{prior}}}{P(o)}$$

$$P(h|o) = \frac{\overbrace{P(o|h)}^{\text{likelihood}} \overbrace{P(h)}^{\text{prior}}}{P(o)}$$

$$\overbrace{P(h|o)}^{\text{posterior}} = \frac{\overbrace{P(o|h)}^{\text{likelihood}} \overbrace{P(h)}^{\text{prior}}}{P(o)}$$

$$\begin{array}{c} \text{posterior} \\ \underbrace{P(h|o)} \end{array} = \frac{\begin{array}{cc} \text{likelihood} & \text{prior} \\ \underbrace{P(o|h)} & \underbrace{P(h)} \end{array}}{\underbrace{P(o)}_{\text{evidence}}}$$

$$\begin{array}{c} \text{posterior} \\ \underbrace{P(h|o)} \end{array} = \frac{\begin{array}{cc} \text{likelihood} & \text{prior} \\ \underbrace{P(o|h)} & \underbrace{P(h)} \end{array}}{\int P(o|h)P(h)dh}$$

$$\overbrace{P(h|o)}^{\text{posterior}} \propto \overbrace{P(o|h)}^{\text{likelihood}} \overbrace{P(h)}^{\text{prior}}$$

megfordítottuk a generatív modellt



$$\overbrace{P(h|o)}^{\text{posterior}} \propto \overbrace{P(o|h)}^{\text{likelihood}} \overbrace{P(h)}^{\text{prior}}$$

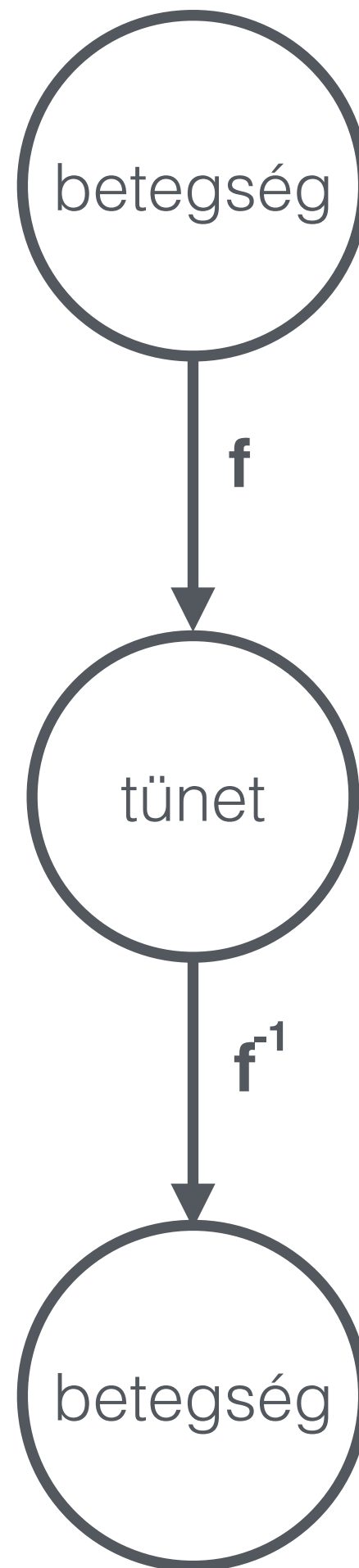
megfordítottuk a generatív modellt



$$\overbrace{P(h|o)}^{\text{posterior}} \propto \overbrace{P(o|h)}^{\text{likelihood}} \overbrace{P(h)}^{\text{prior}}$$

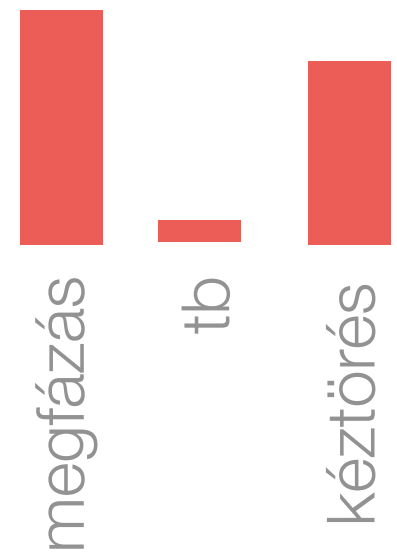


miért kell a prior?



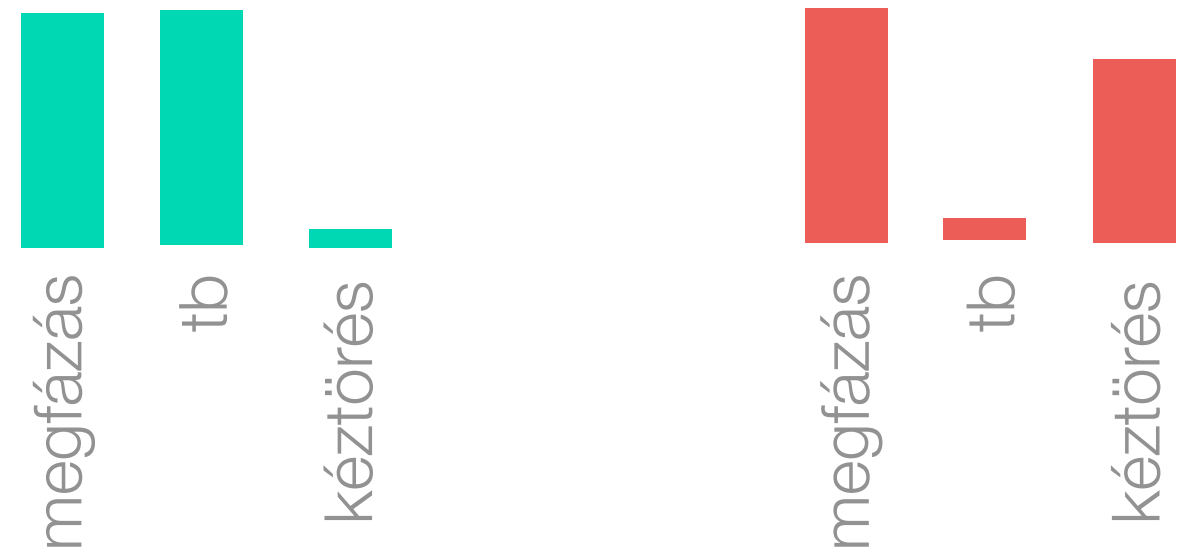
miért köhögök?

$$P(\textit{illness}|\textit{symptom}) \propto P(\textit{symptom}|\textit{illness})P(\textit{illness})$$



$$P(\textit{illness}|\textit{symptom}) \propto P(\textit{symptom}|\textit{illness})P(\textit{illness})$$

megfázás
 milyen gyakori a tb ?
 kéztörés

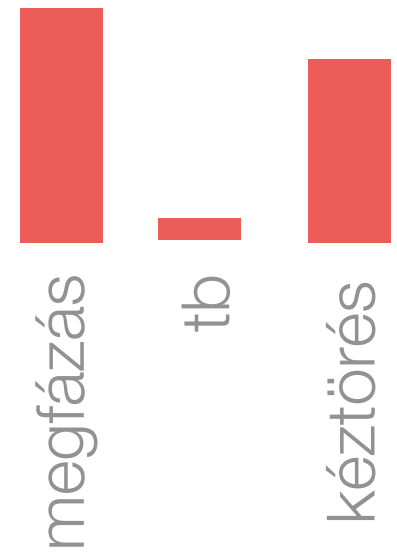
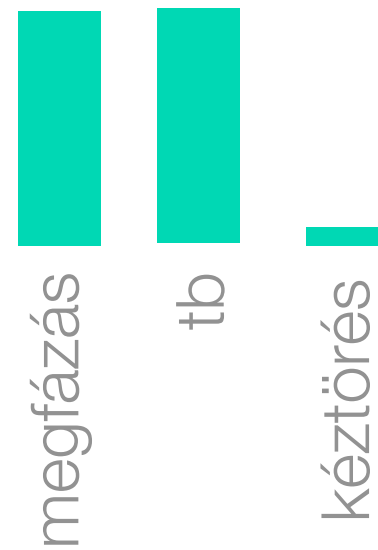
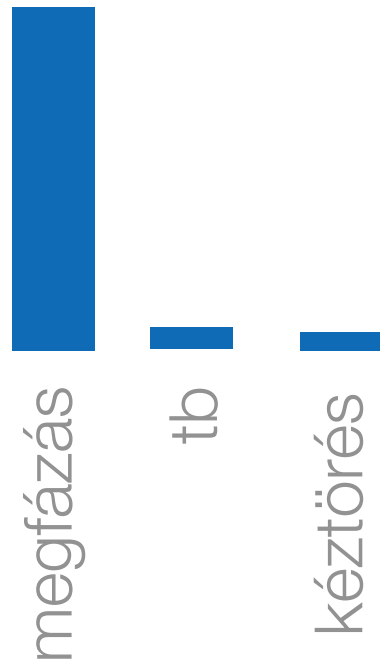


$$P(\textit{illness}|\textit{symptom}) \propto P(\textit{symptom}|\textit{illness})P(\textit{illness})$$

megfázás

ha tb lenne a betegség attól köhögnék?

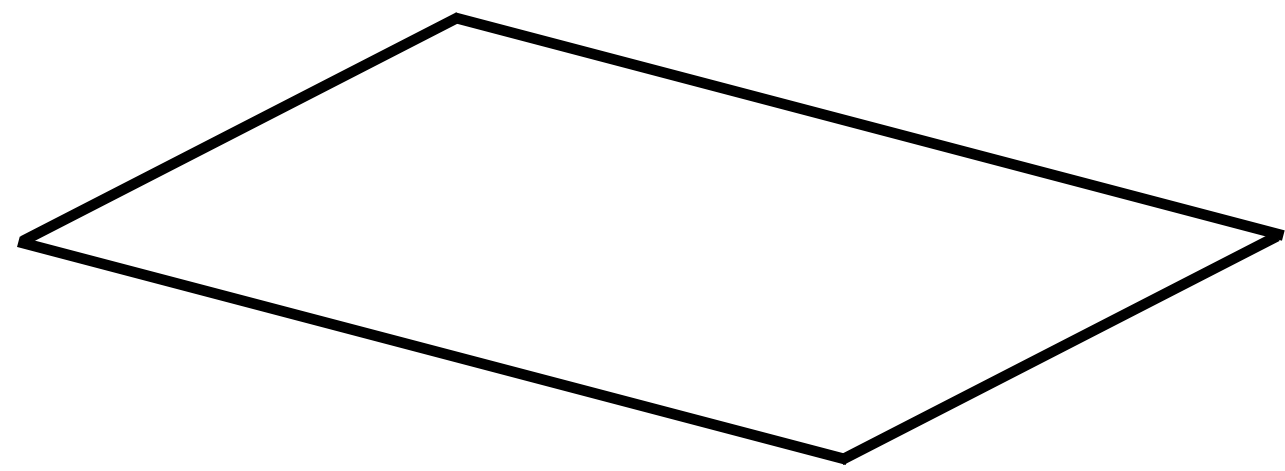
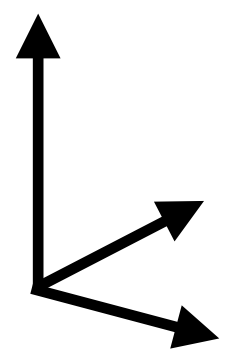
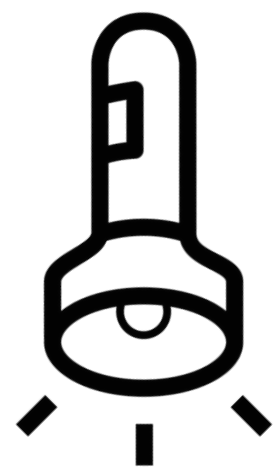
kéztörés

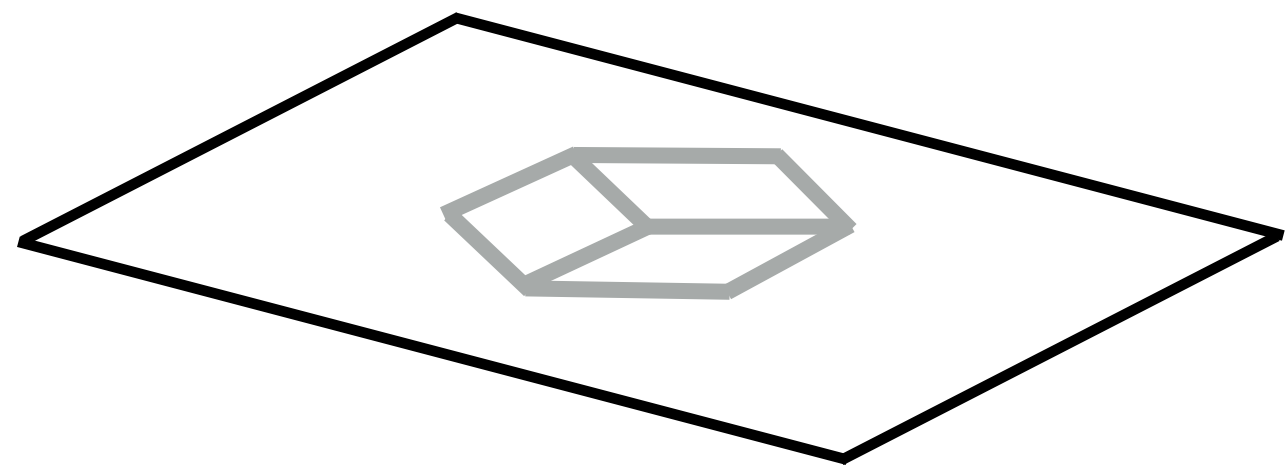
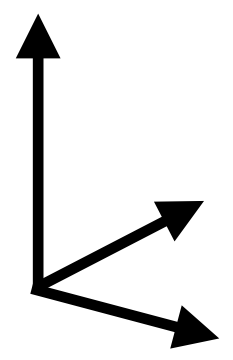
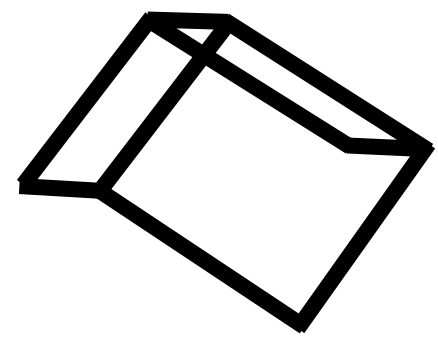
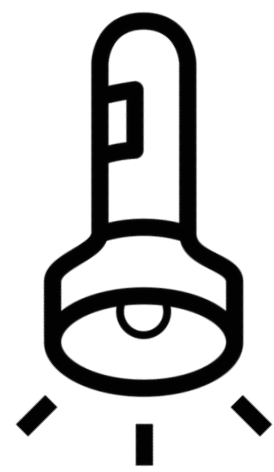


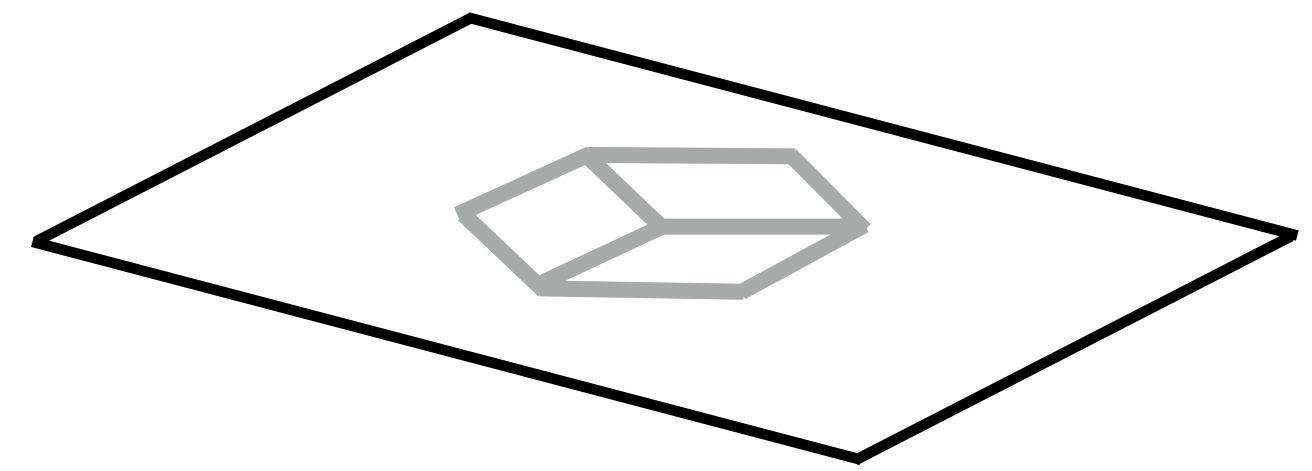
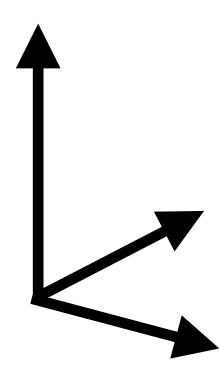
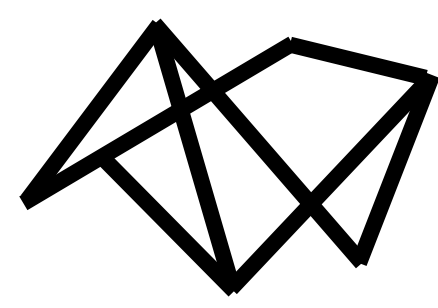
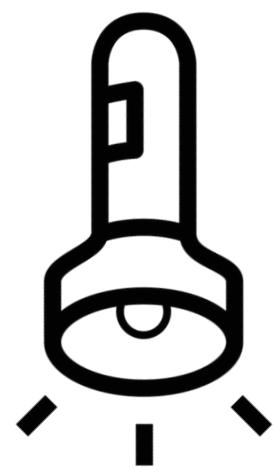
$$P(\textit{illness}|\textit{symptom}) \propto P(\textit{symptom}|\textit{illness})P(\textit{illness})$$

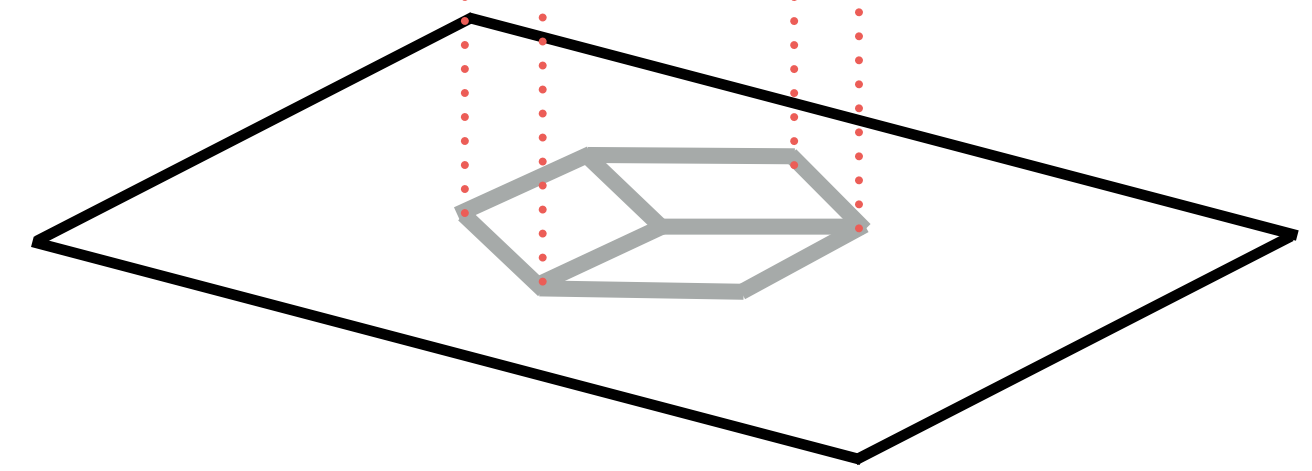
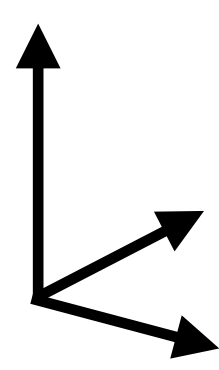
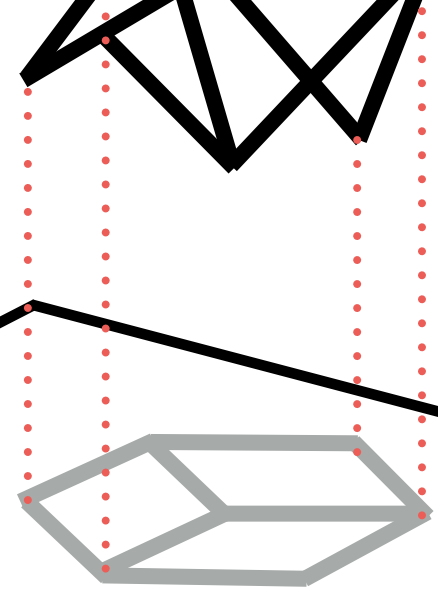
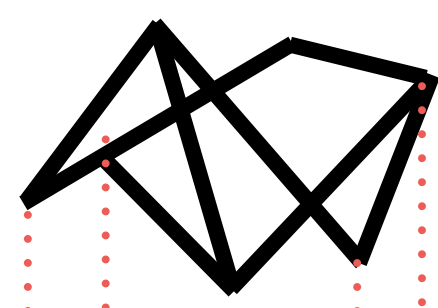
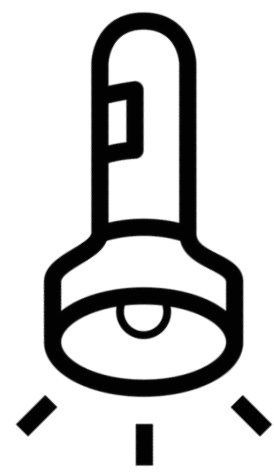
valószínűleg megfáztam

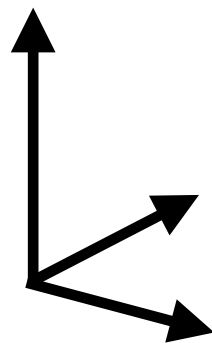
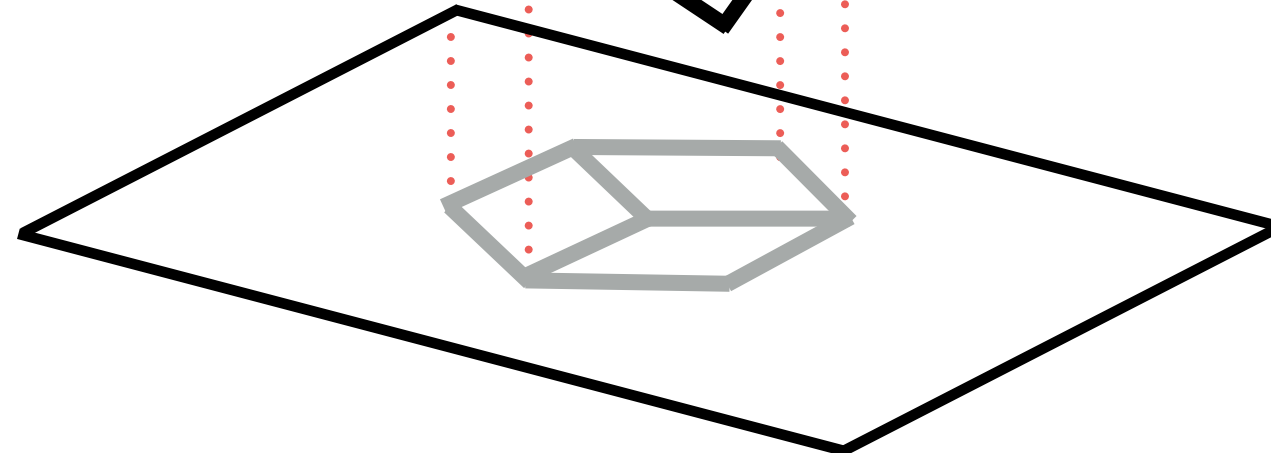
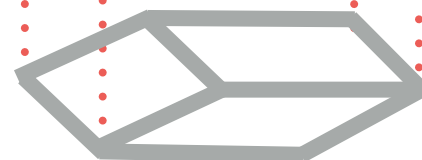
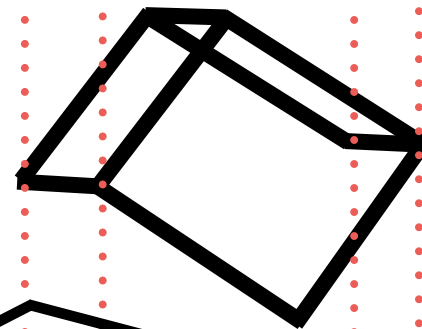
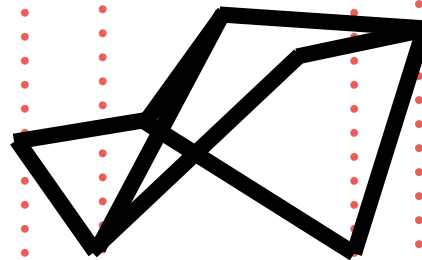
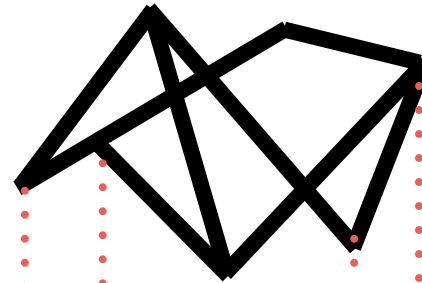
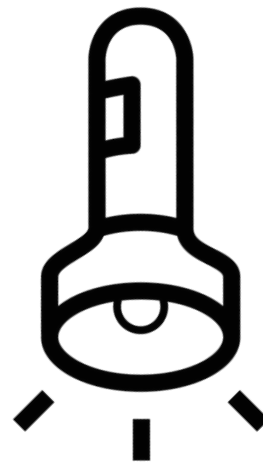
3D - 2D





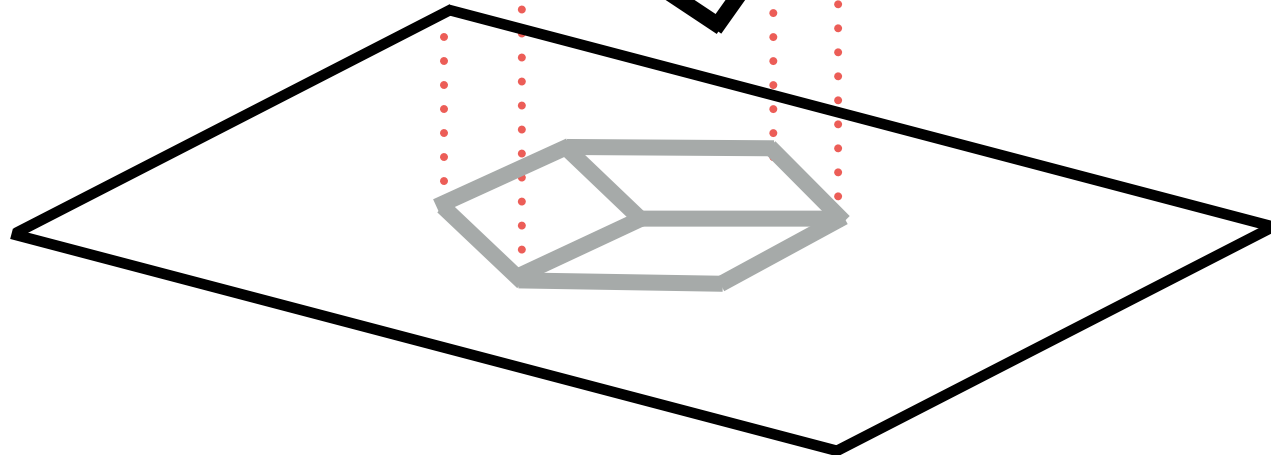
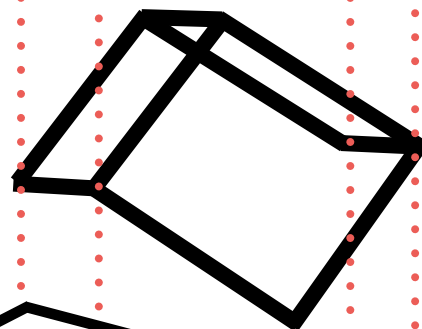
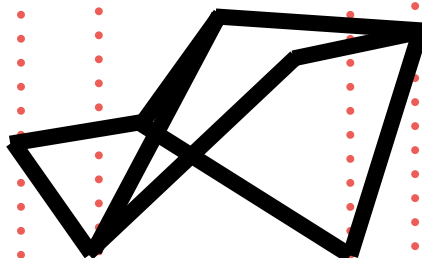
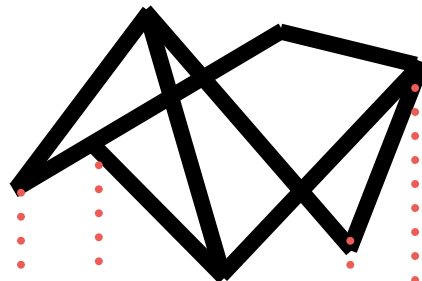
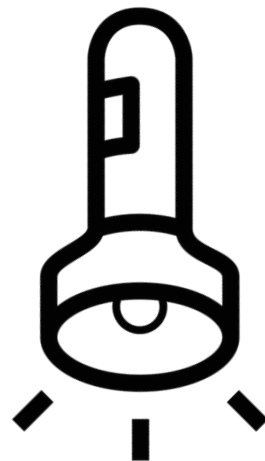
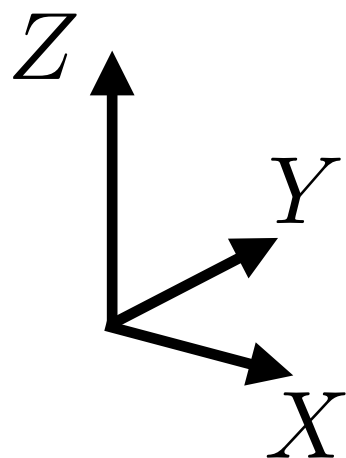
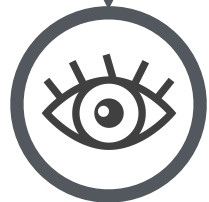






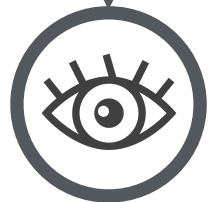


$$f = \hat{\mathbf{P}}_{XY}$$

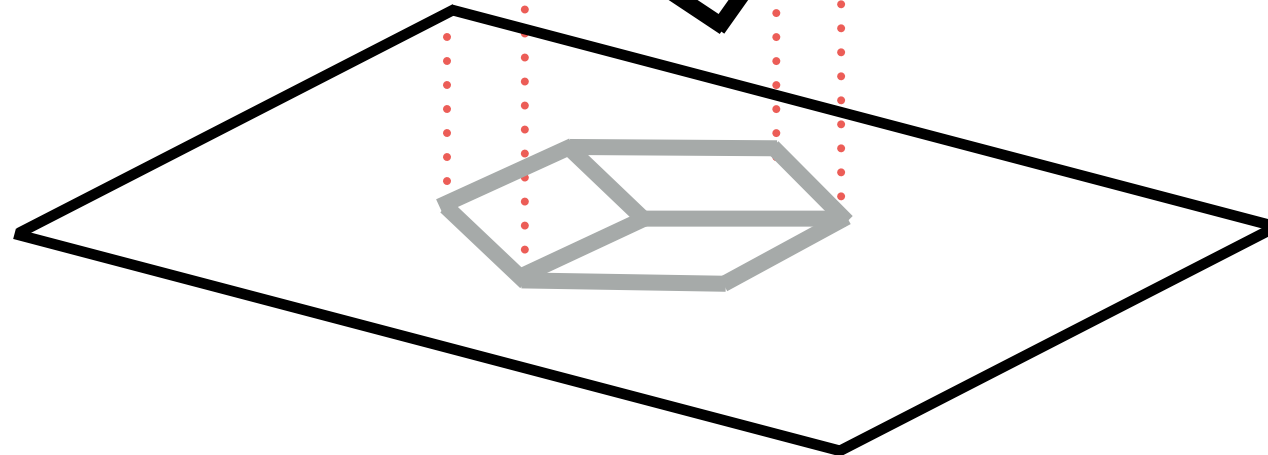
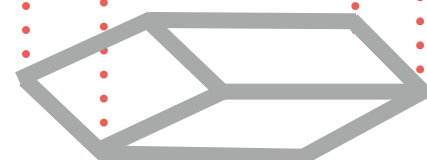
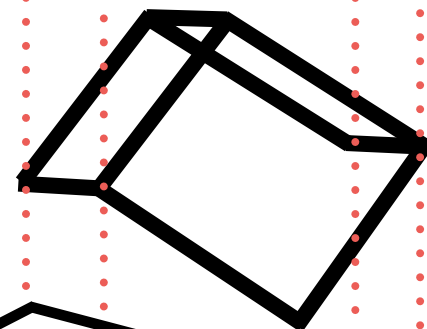
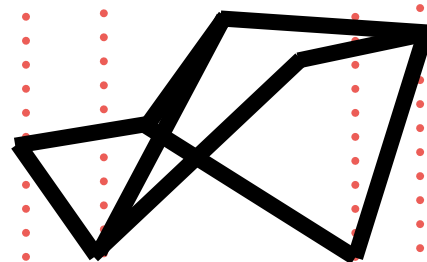
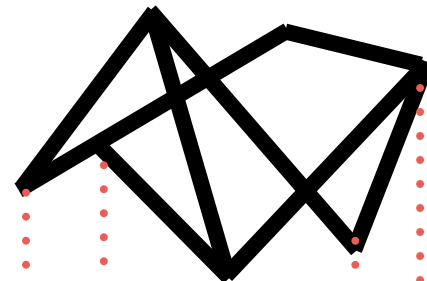
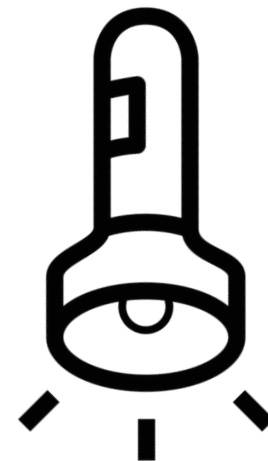
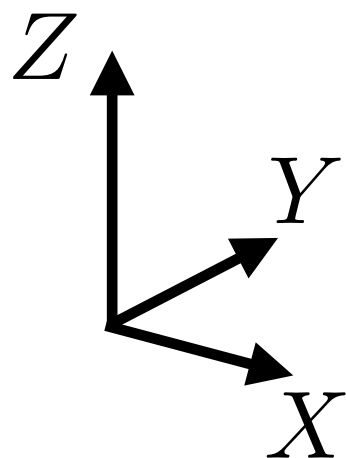




$f = \hat{\mathbf{P}}_{XY}$ nem injektív

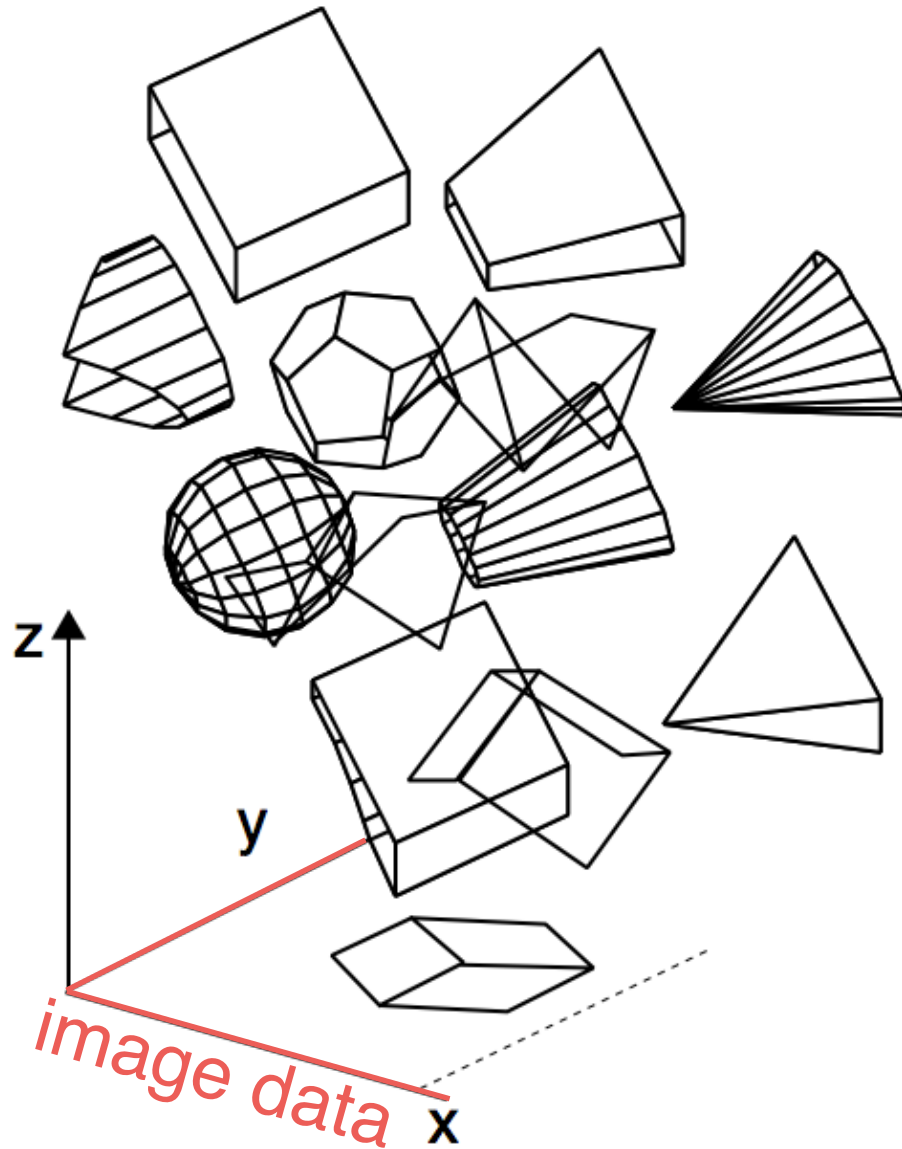


f^{-1} nem egyértelmű



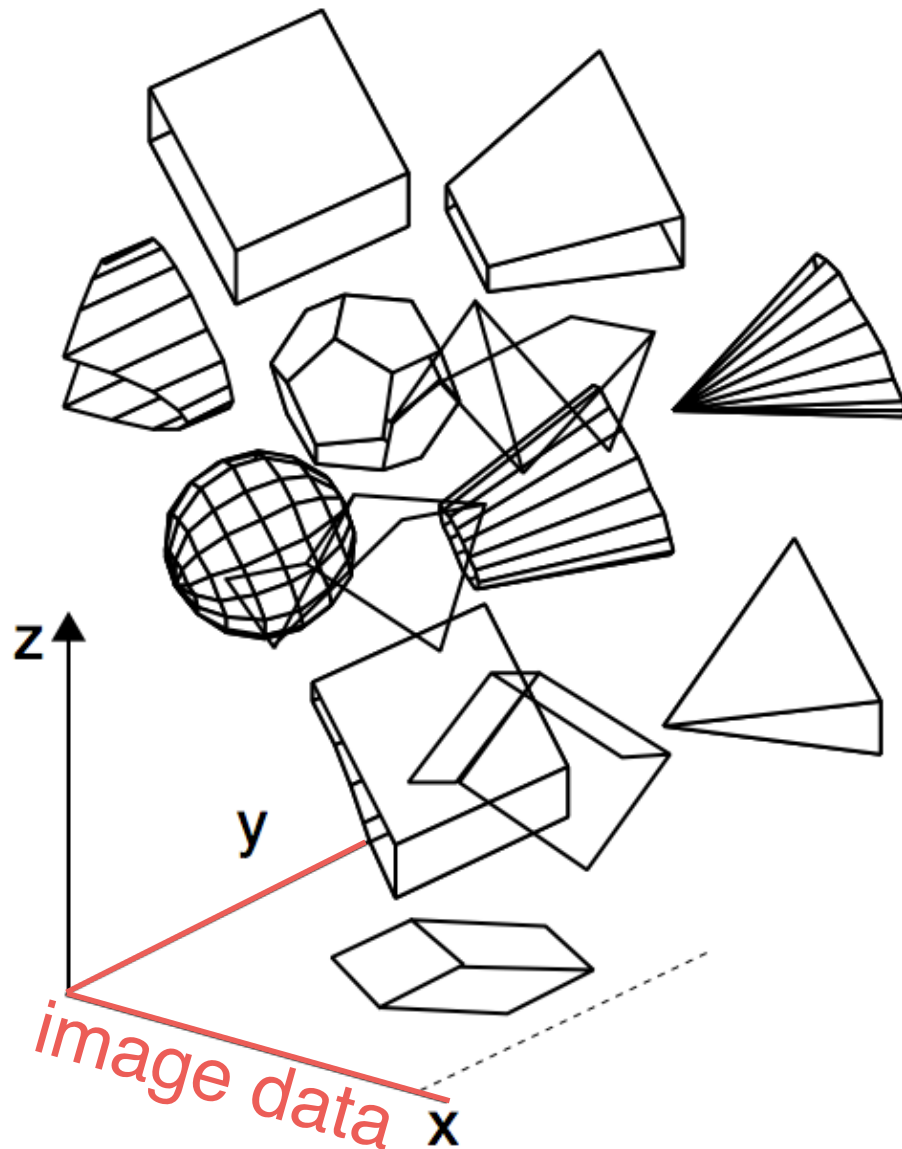
hipotézis tér: minden lehetséges 3D drótváz

hipotézis tér: minden lehetséges 3D drótváz

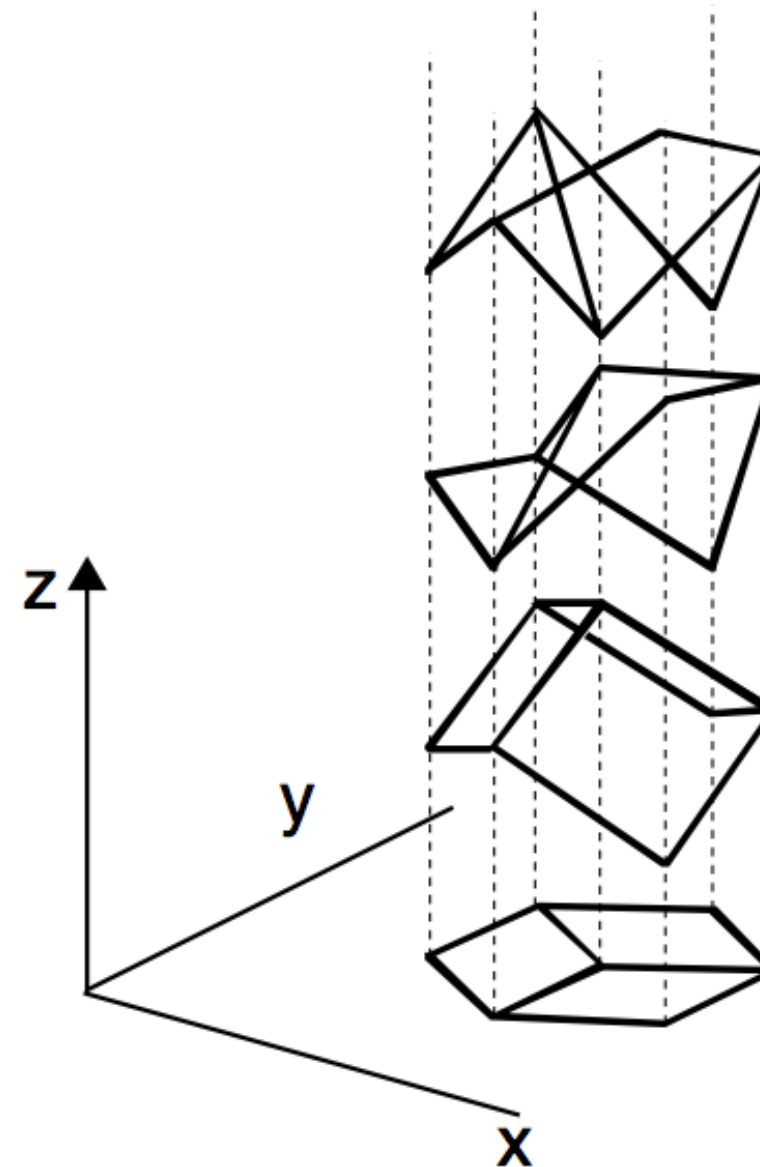


hipotézisek amelyekre
magas a prior

hipotézis tér: minden lehetséges 3D drótváz

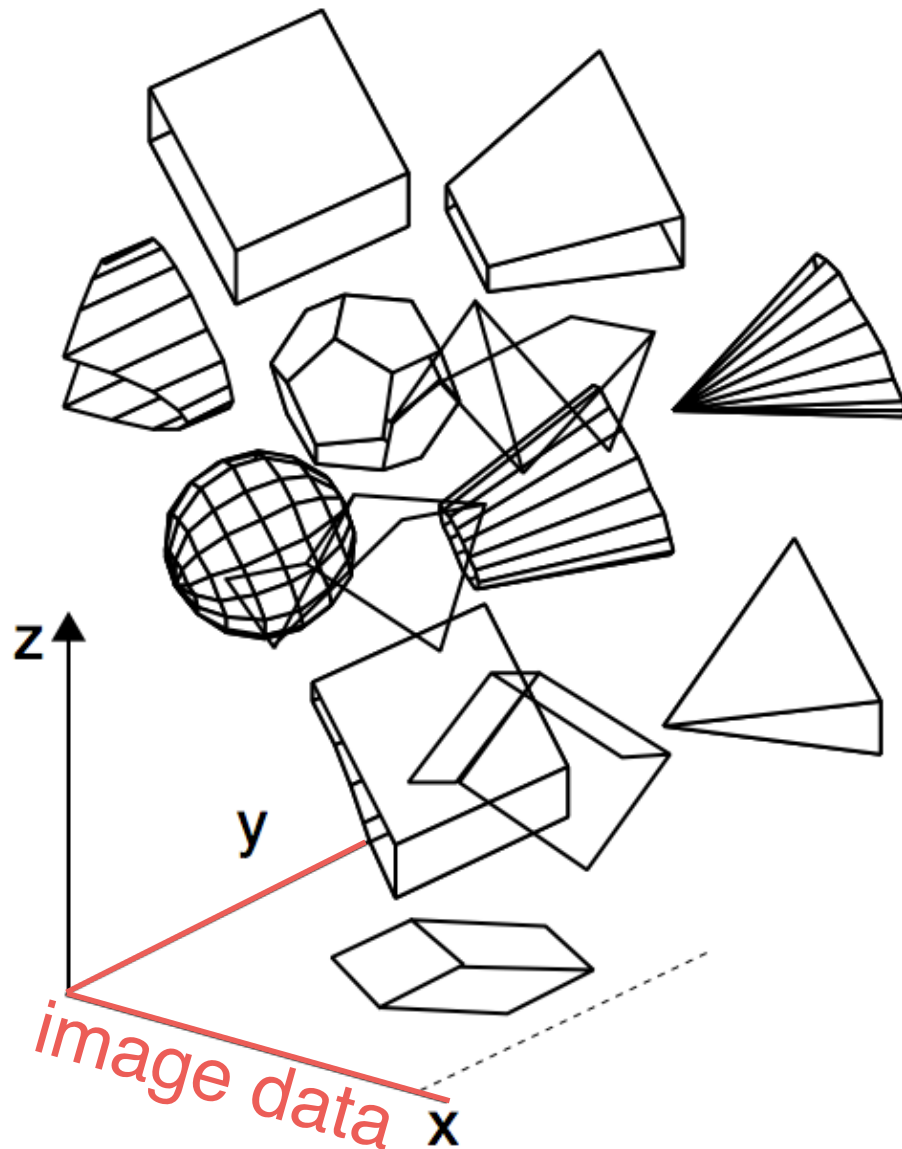


hipotézisek amelyekre
magas a prior

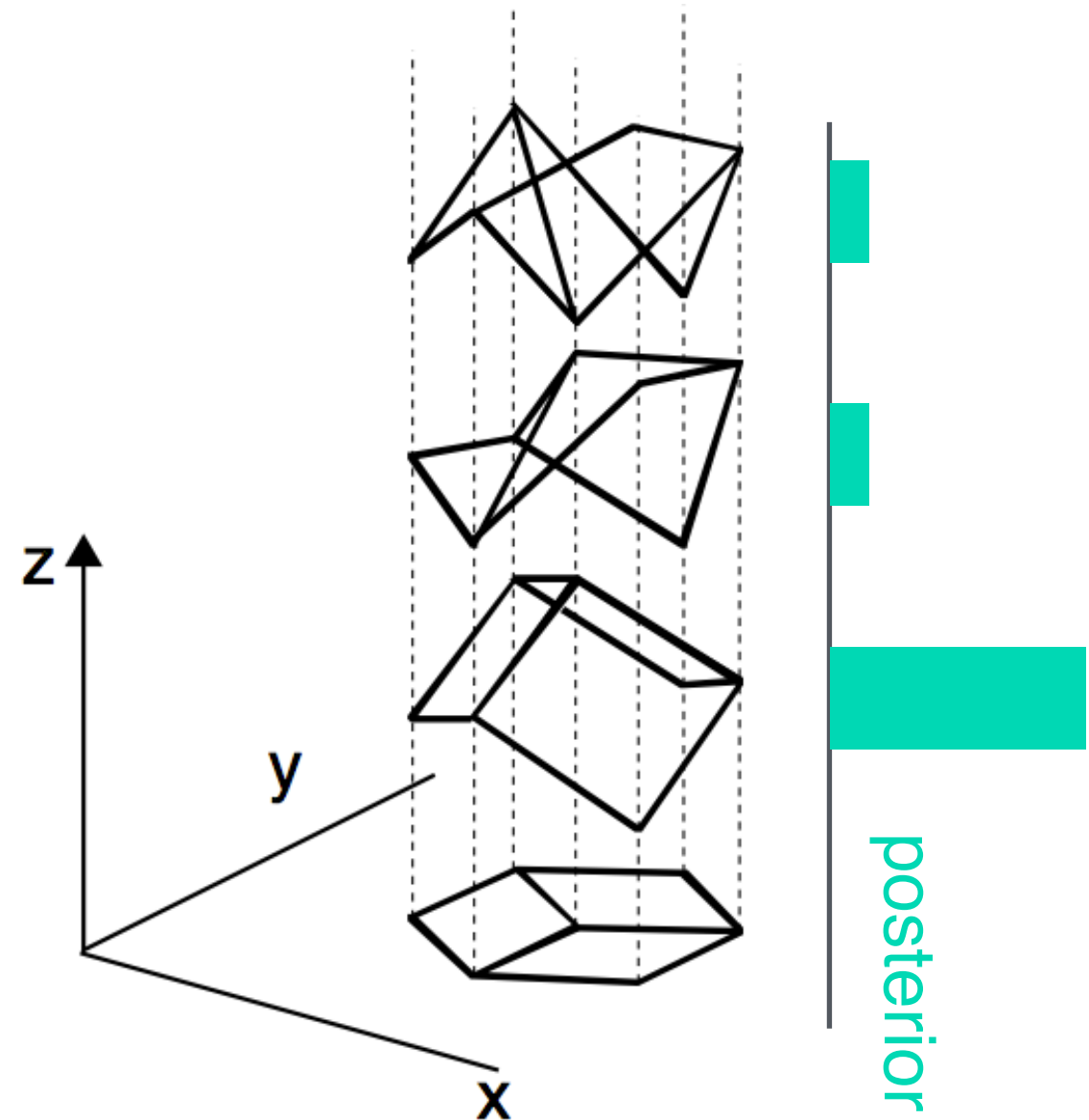


hipotézisek amelyekre
nem 0 a likelihood

hipotézis tér: minden lehetséges 3D drótváz



hipotézisek amelyekre
magas a prior



hipotézisek amelyekre
nem 0 a likelihood

Observed



Ground Truth



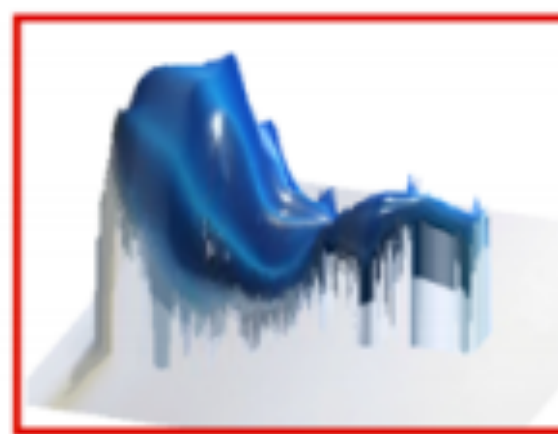
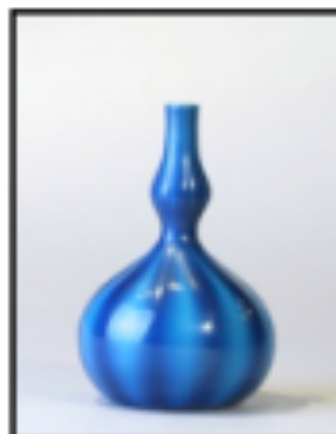
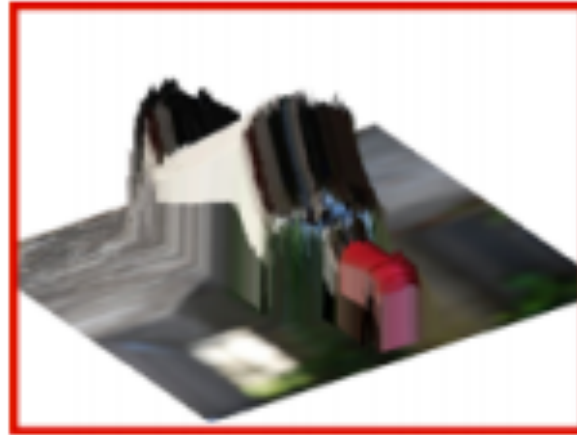
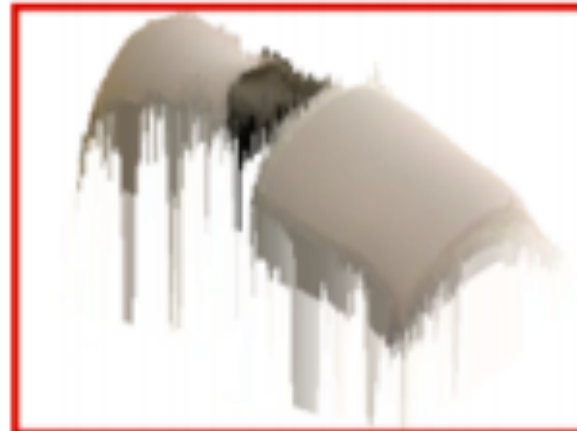
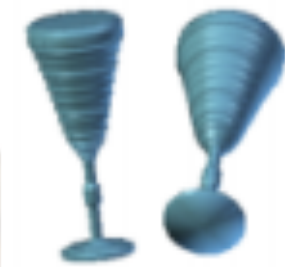
Baseline



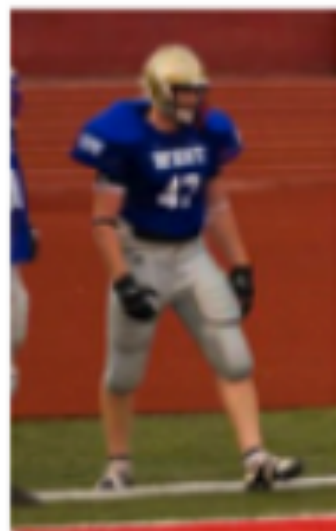
Picture



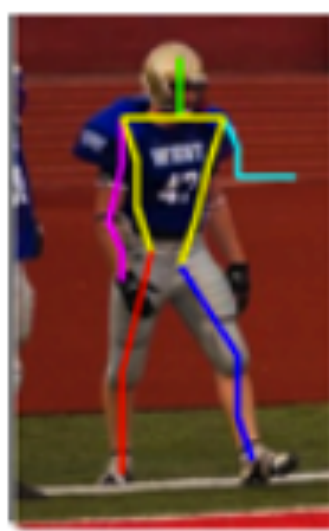
Inferred Model



Observed



Baseline



Picture



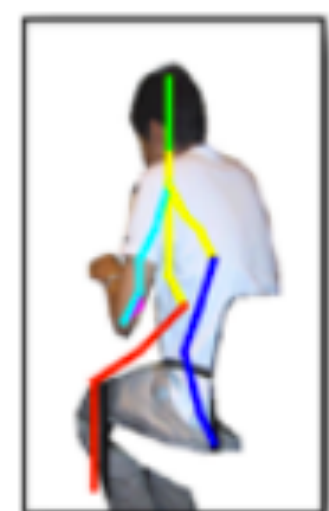
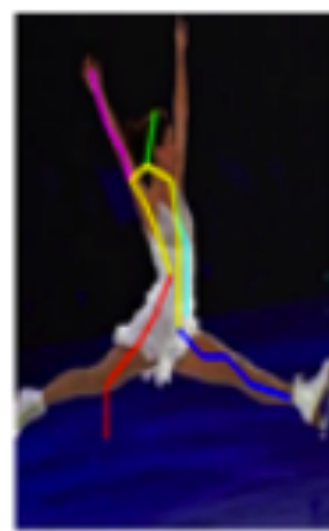
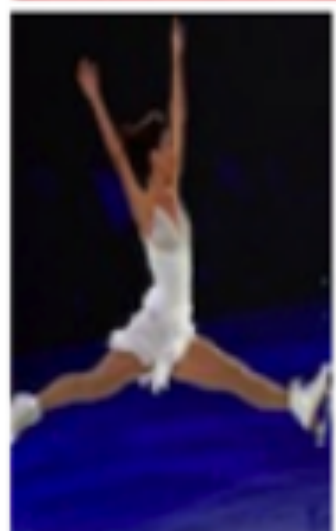
Observed



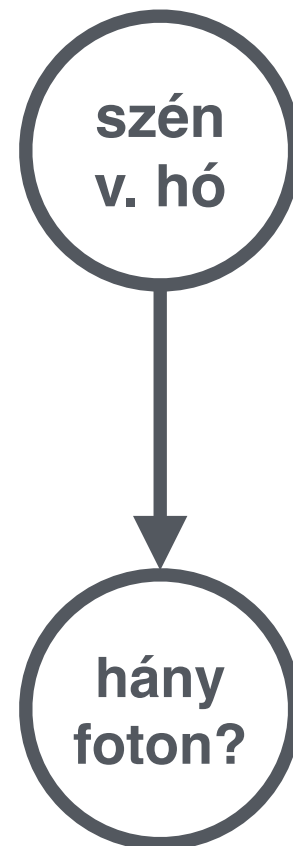
Baseline



Picture



színek







megvilágítás

elnyelési görbe
(anyag)



spektrális eloszlás

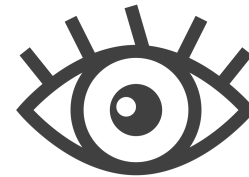
megvilágítás

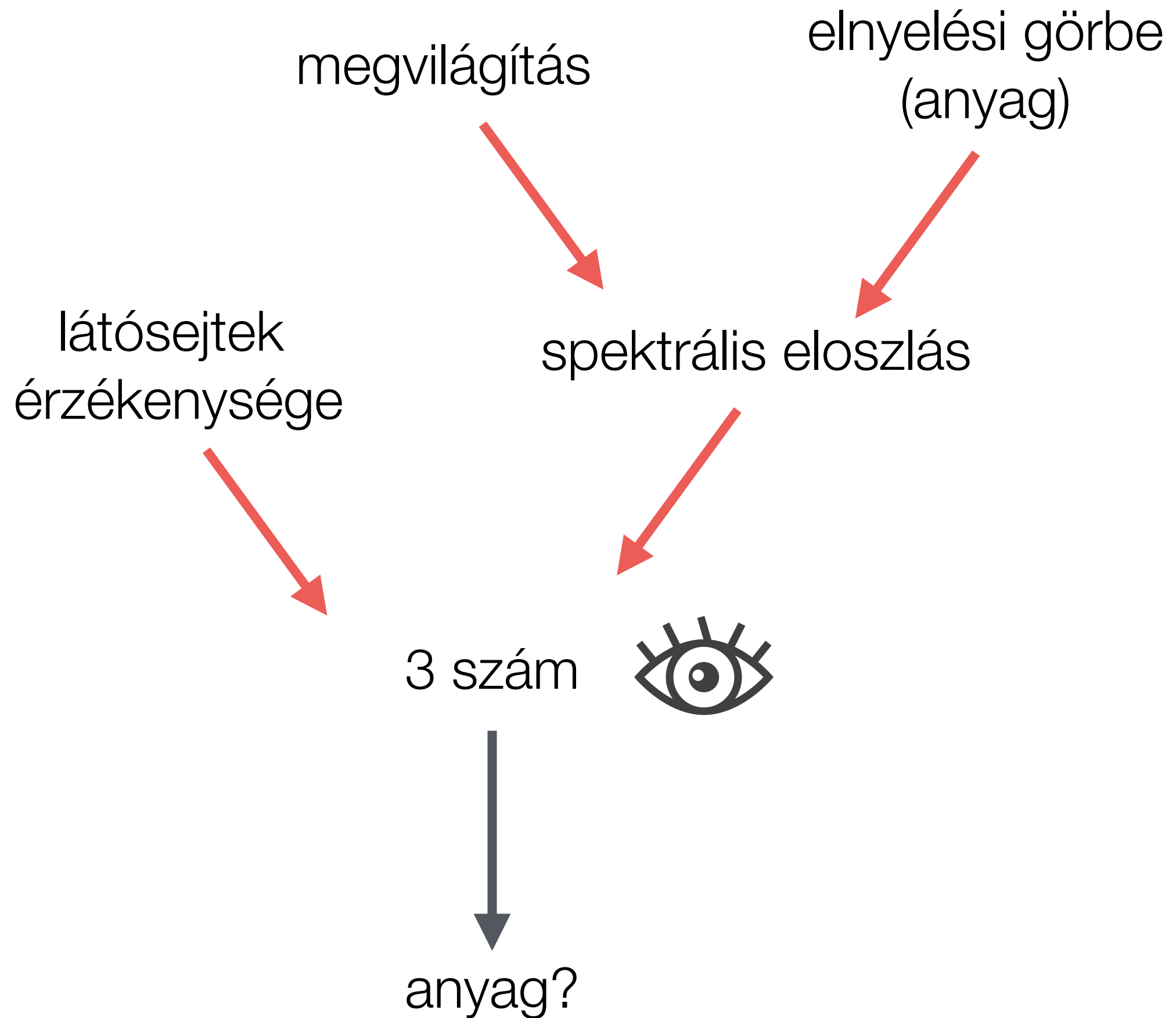
elnyelési görbe
(anyag)

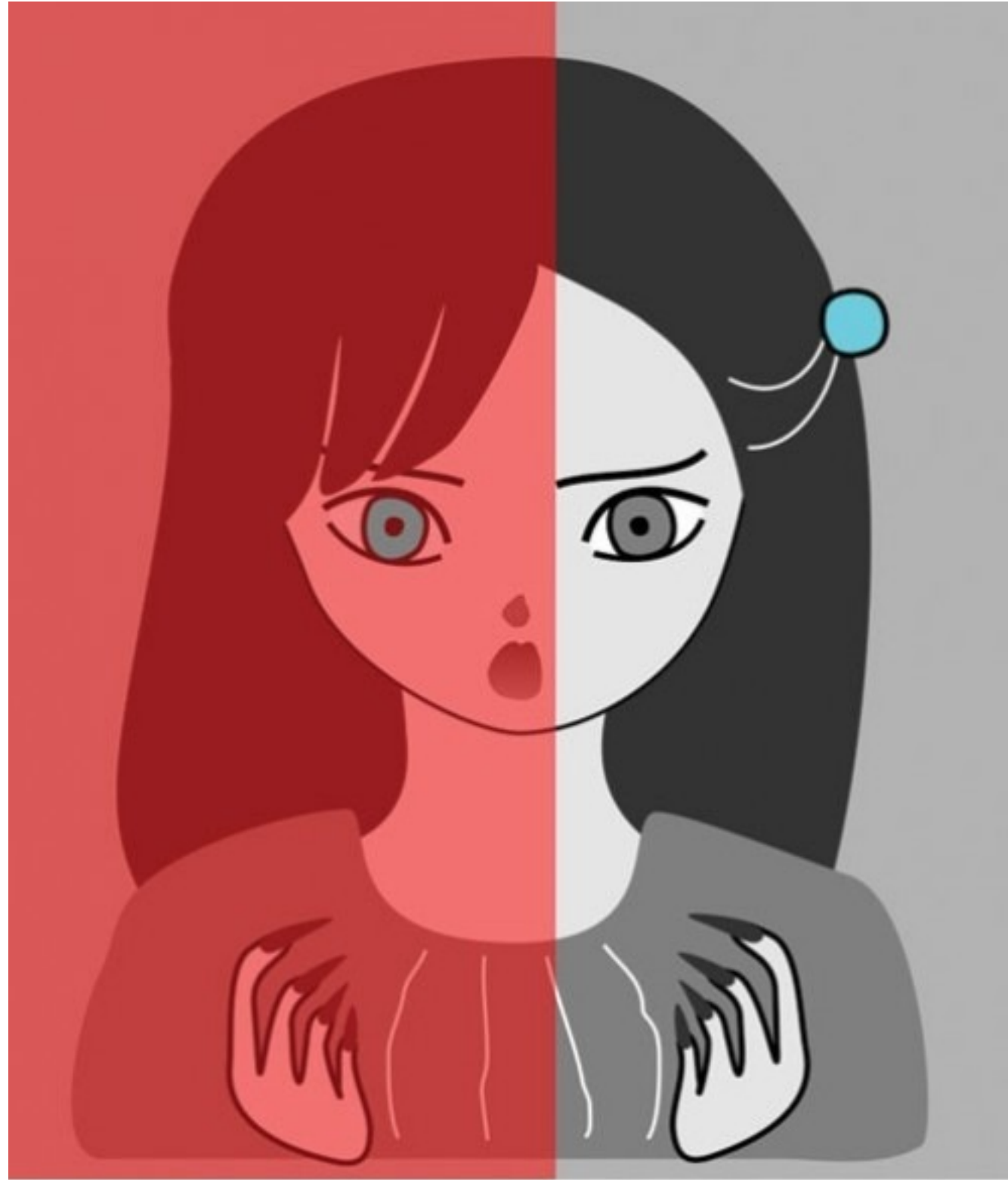
látósejtek
érzékenysége

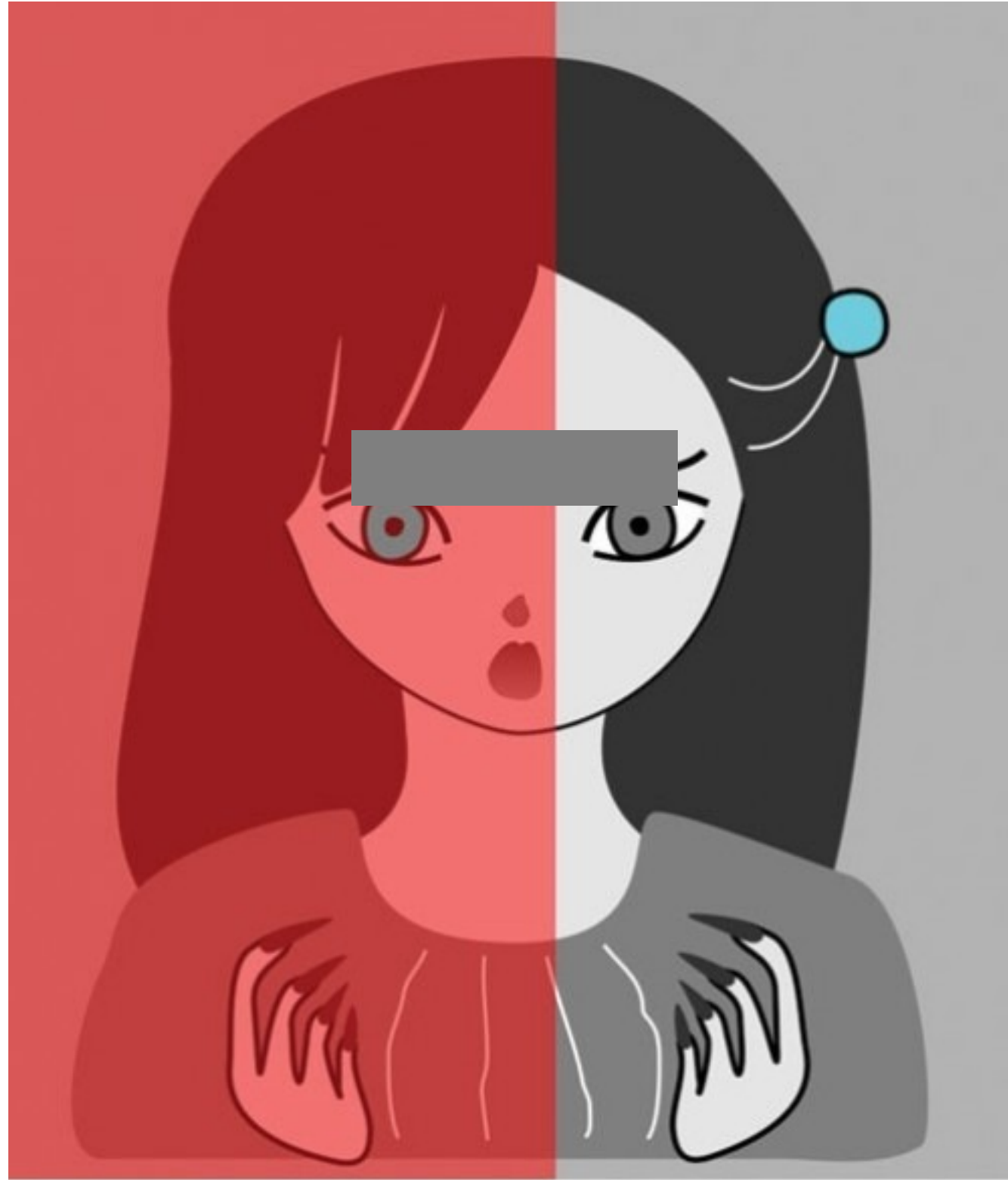
spektrális eloszlás

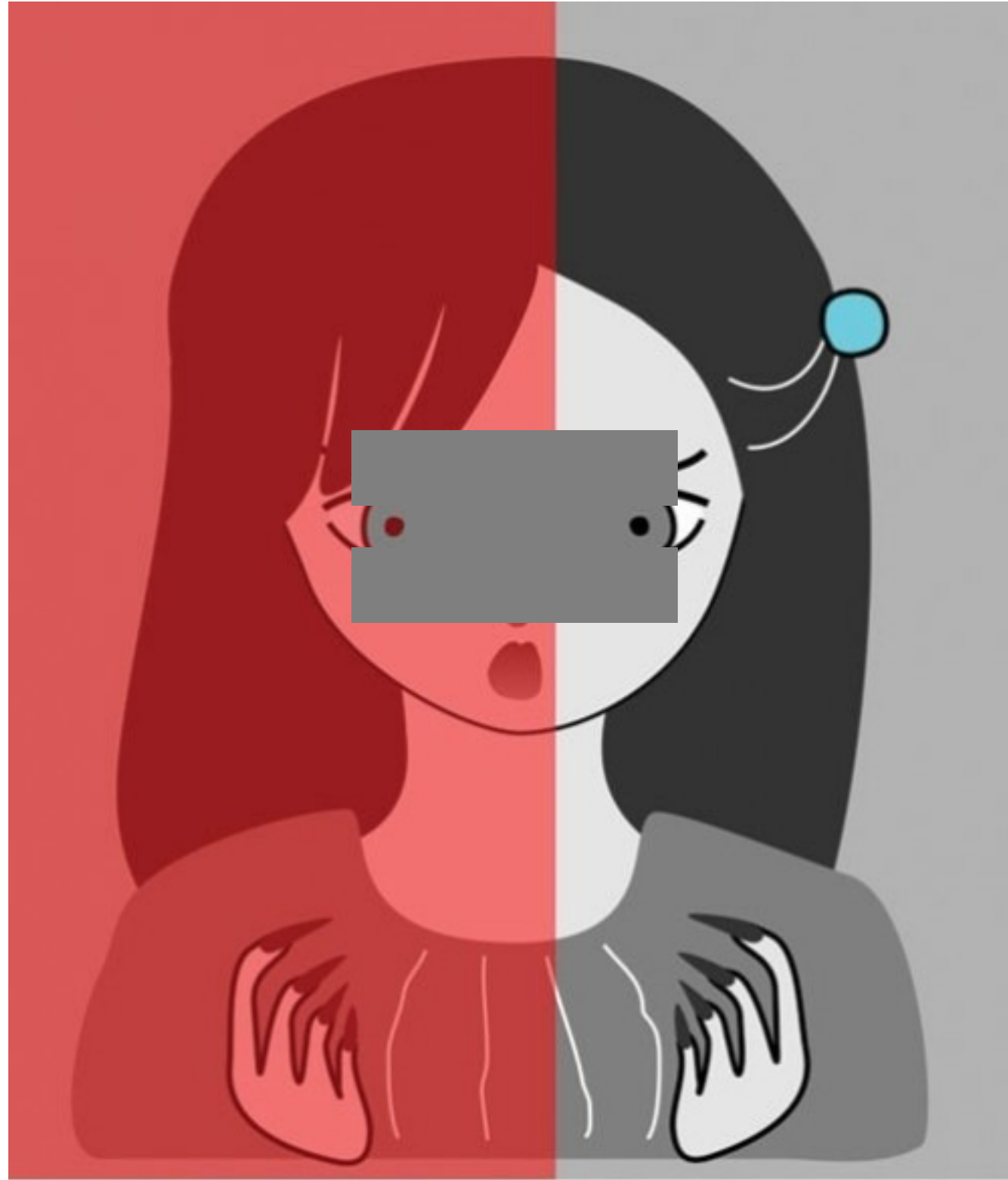
3 szám







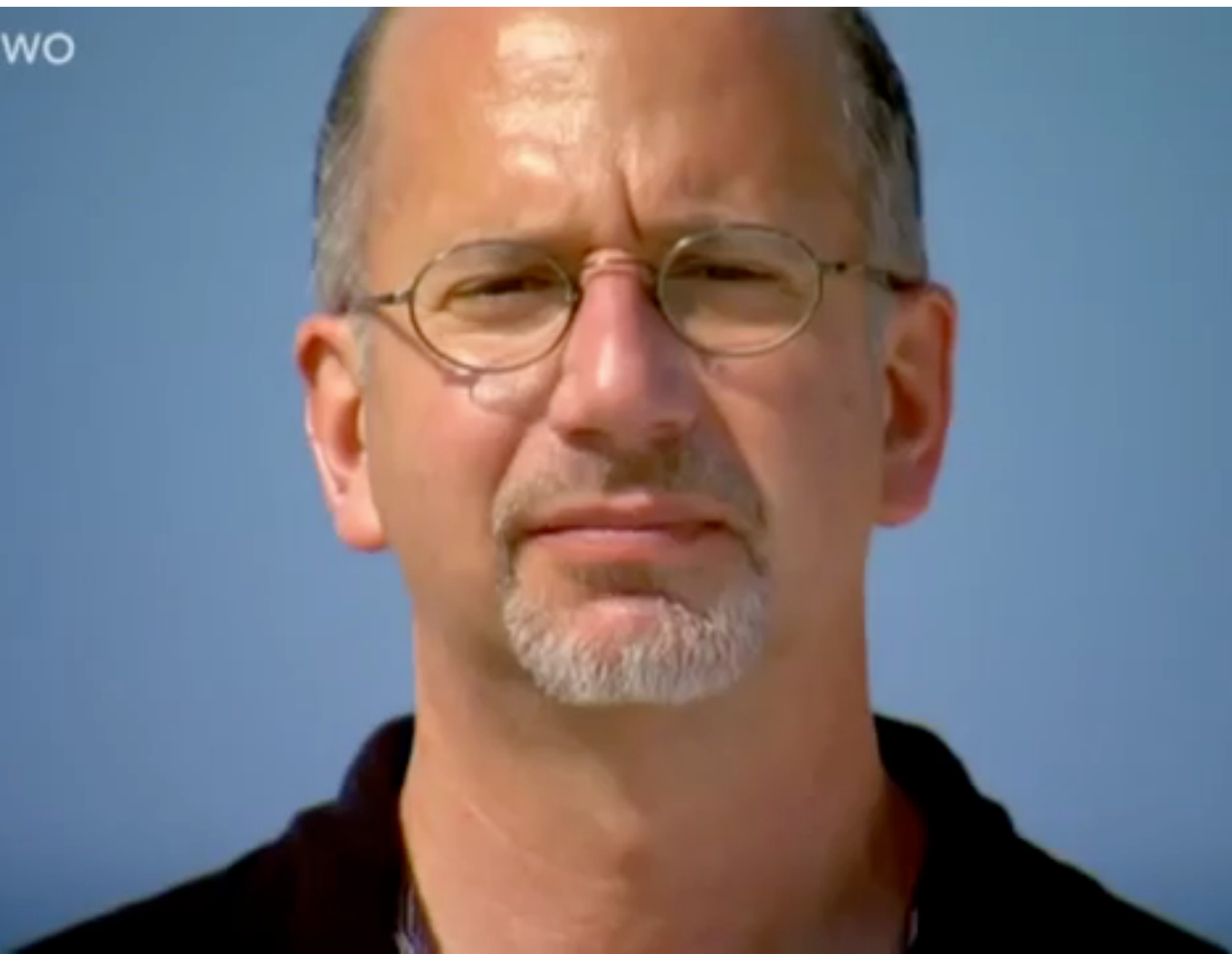




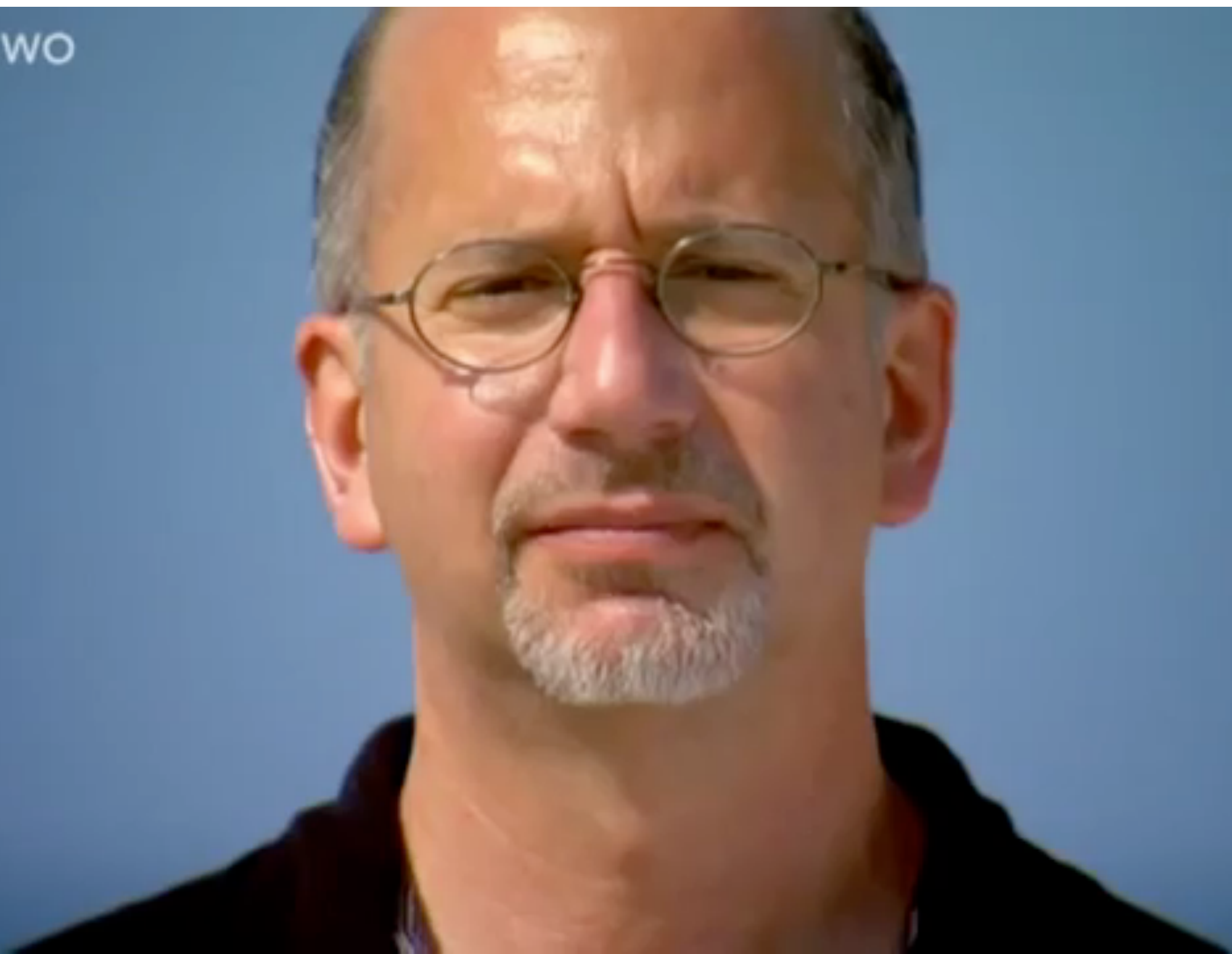
beszédfelismerés

$$P(\textit{sound}) \rightarrow P(\textit{word} \mid \textit{sound})$$

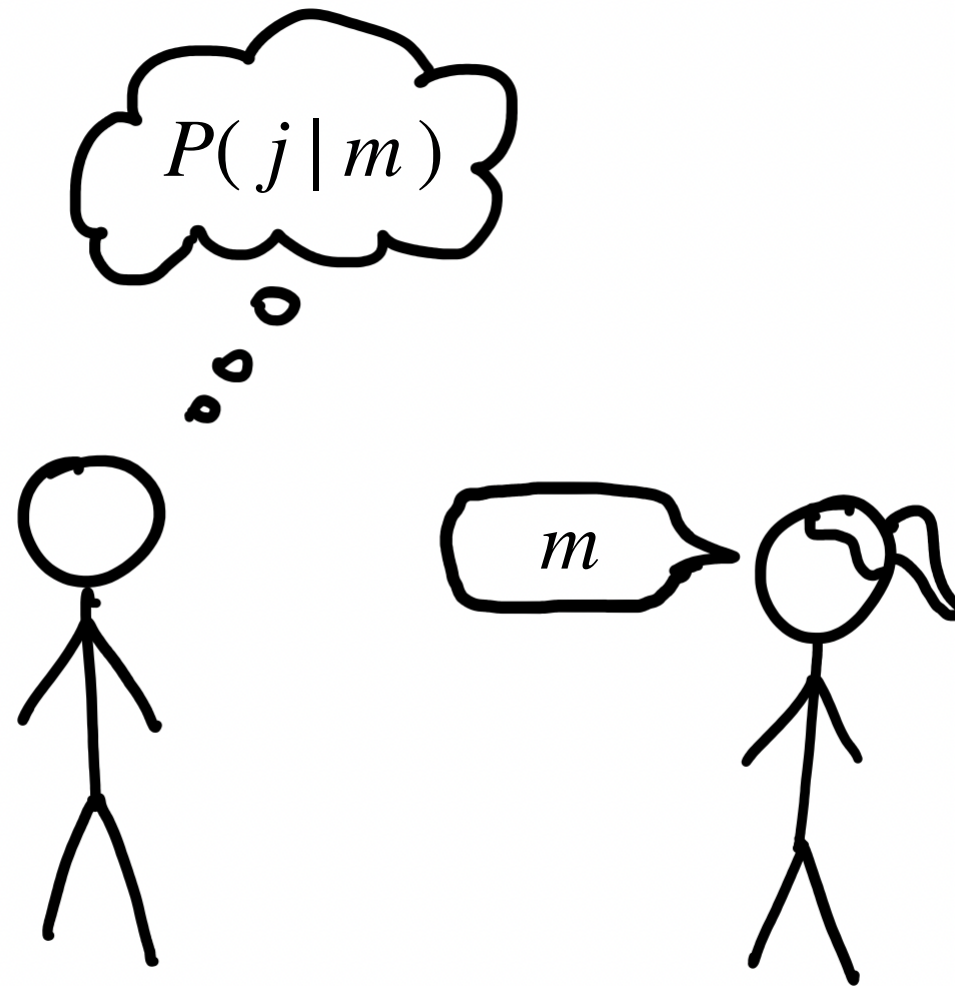
BBC TWO



BBC TWO

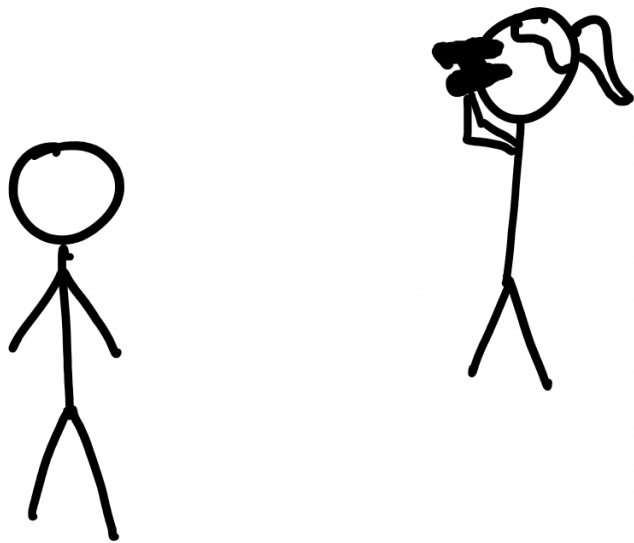


Szövegértelmezés



Szövegértelmezés

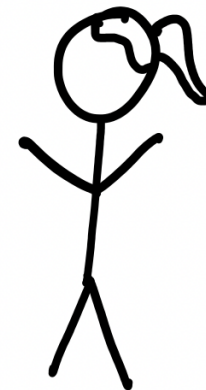
"A lány meglátta a fiút a távcsővel"



j_1



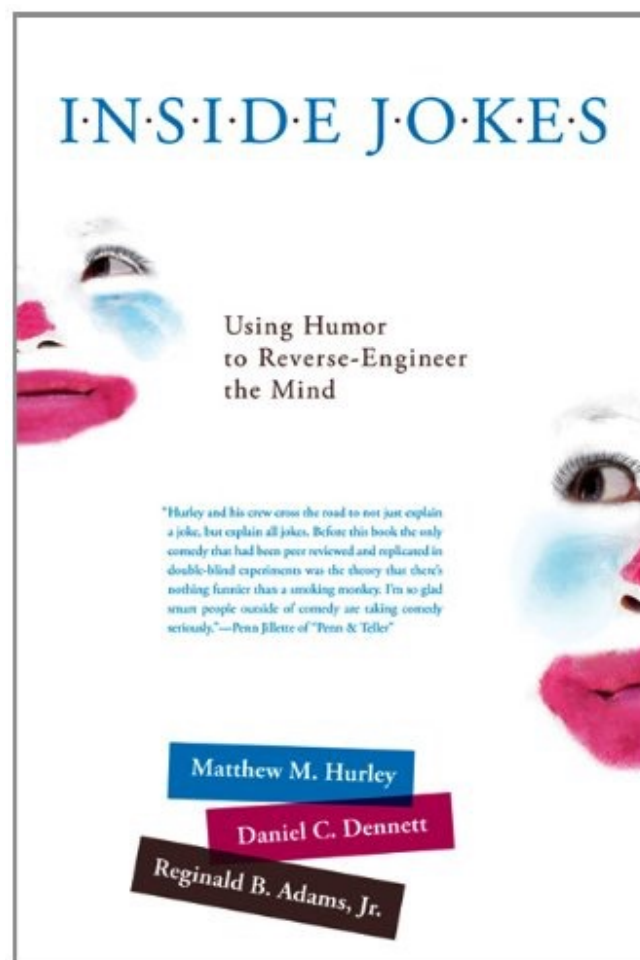
j_2



- “Elnézést, kártyával lehet fizetni?”
- “Persze”

- “Elnézést, kártyával lehet fizetni?”
- “Persze”
- “Egy ászból és királyból tud visszaadni?”

- “Elnézést, kártyával lehet fizetni?”
- “Persze”
- “Egy ászból és királyból tud visszaadni?”



**humor = téves inferencia
felfedezése?**

- a látótér határai nem látszanak
- csak középen látunk élesen (fovea)
- vakfolt
- a szakkádoktól nem rázkódik a világ



összefoglalás

összefoglalás

- ami érdekel az általában közvetlenül **nem megfigyelhető**

összefoglalás

- ami érdekel az általában közvetlenül **nem megfigyelhető**
- a rejtett állapotok kikövetkeztetésében segít a tapasztalatokat **generáló folyamat** ismerete

összefoglalás

- ami érdekel az általában közvetlenül **nem megfigyelhető**
- a rejtett állapotok kikövetkeztetésében segít a tapasztalatokat **generáló folyamat** ismerete
- ennek megfordítása a **likelihood**: melyek azok a rejtett állapotok amelyek összeegyeztethetőek a megfigyelésekkel?

összefoglalás

- ami érdekel az általában közvetlenül **nem megfigyelhető**
- a rejtett állapotok kikövetkeztetésében segít a tapasztalatokat **generáló folyamat** ismerete
- ennek megfordítása a **likelihood**: melyek azok a rejtett állapotok amelyek összeegyeztethetőek a megfigyelésekkel?
- de ez még nem elég, kell **prior** is hogy feloldja az empirikus aluldetermináltság problémáját

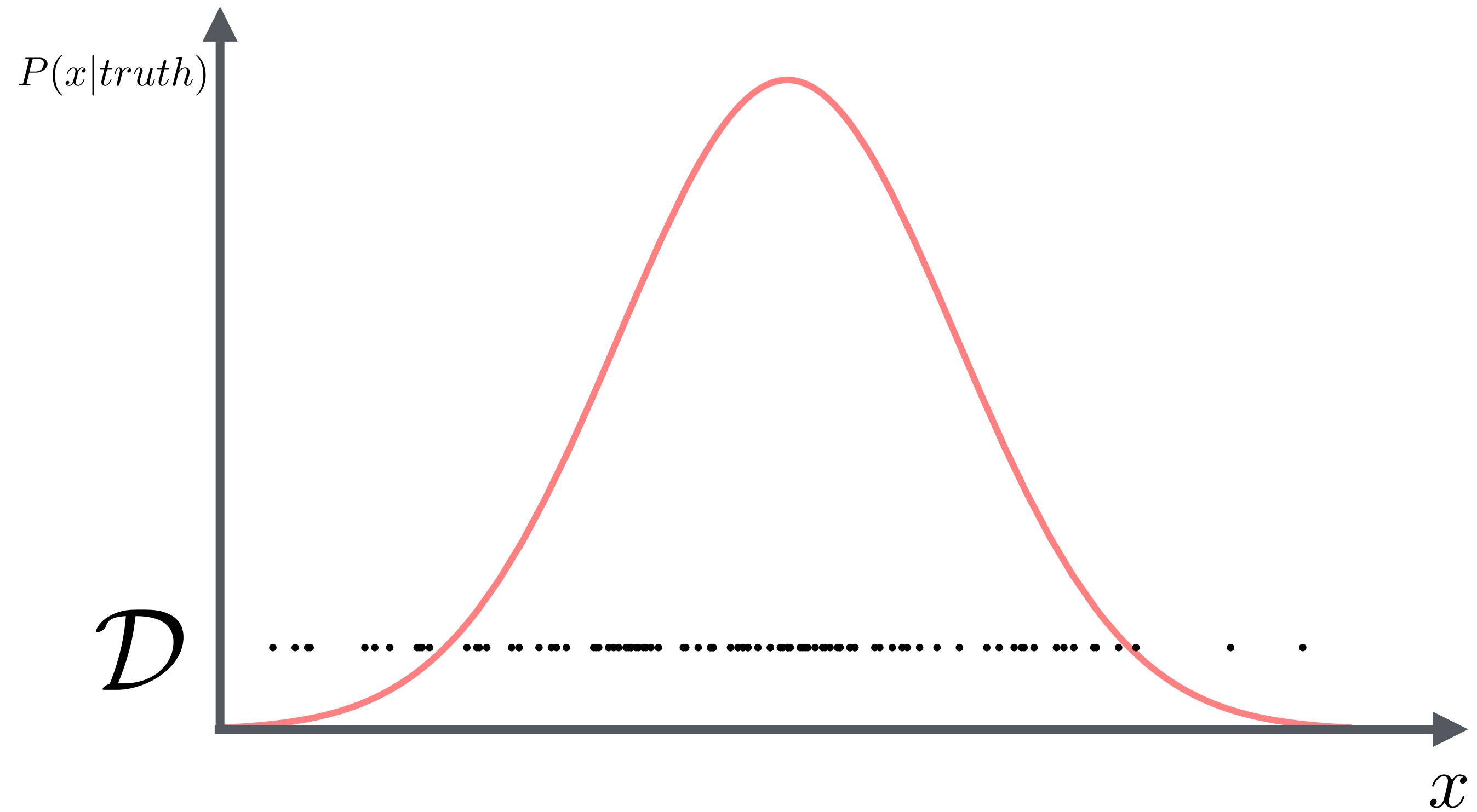
összefoglalás

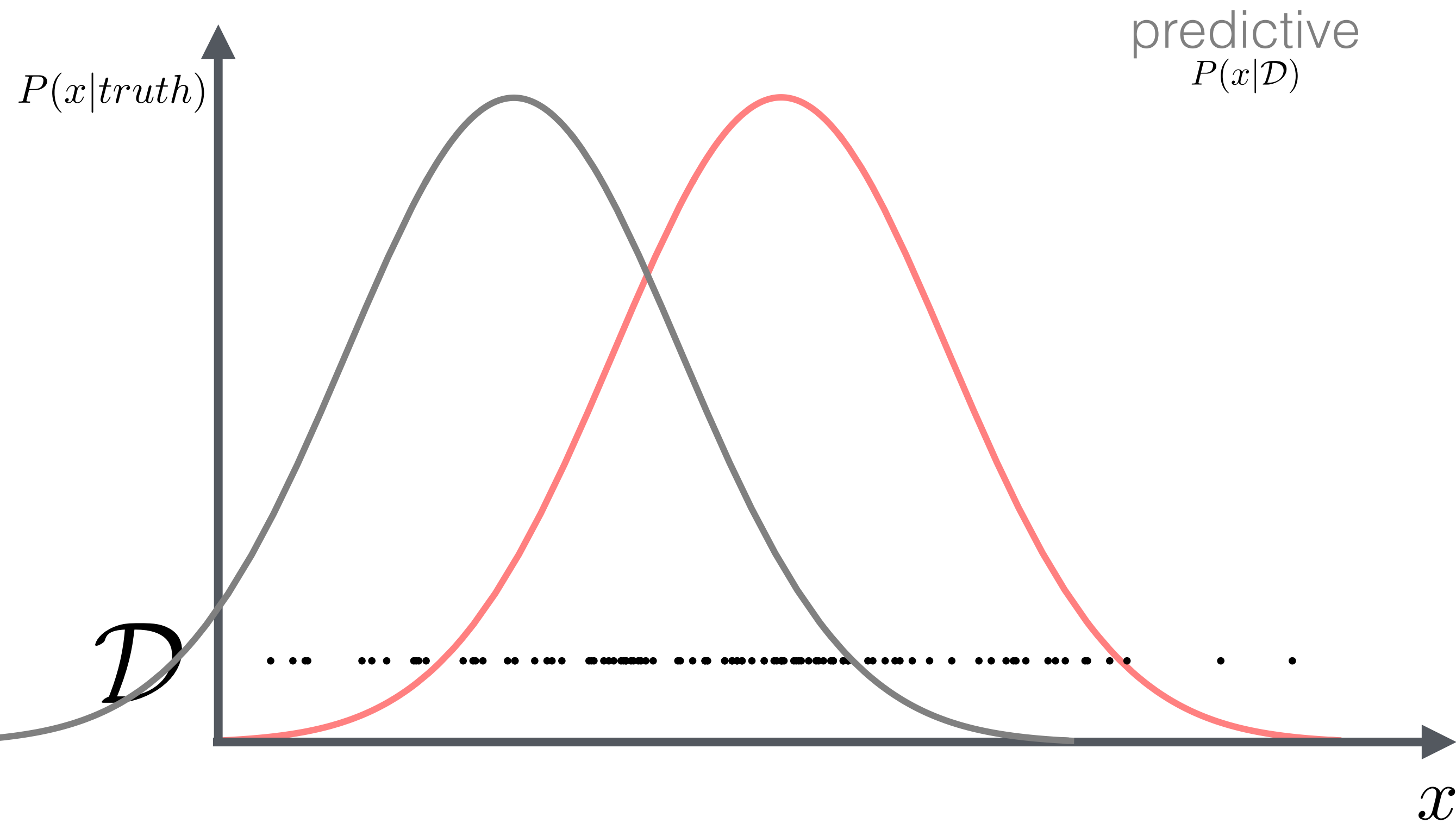
- ami érdekel az általában közvetlenül **nem megfigyelhető**
- a rejtett állapotok kikövetkeztetésében segít a tapasztalatokat **generáló folyamat** ismerete
- ennek megfordítása a **likelihood**: melyek azok a rejtett állapotok amelyek összeegyeztethetőek a megfigyelésekkel?
- de ez még nem elég, kell **prior** is hogy feloldja az empirikus aluldetermináltság problémáját
- a kettő szorzata a **posterior**, ami megadja jelenlegi tudásunkat a nem megfigyelt változók értékeinek plauzibilitásáról

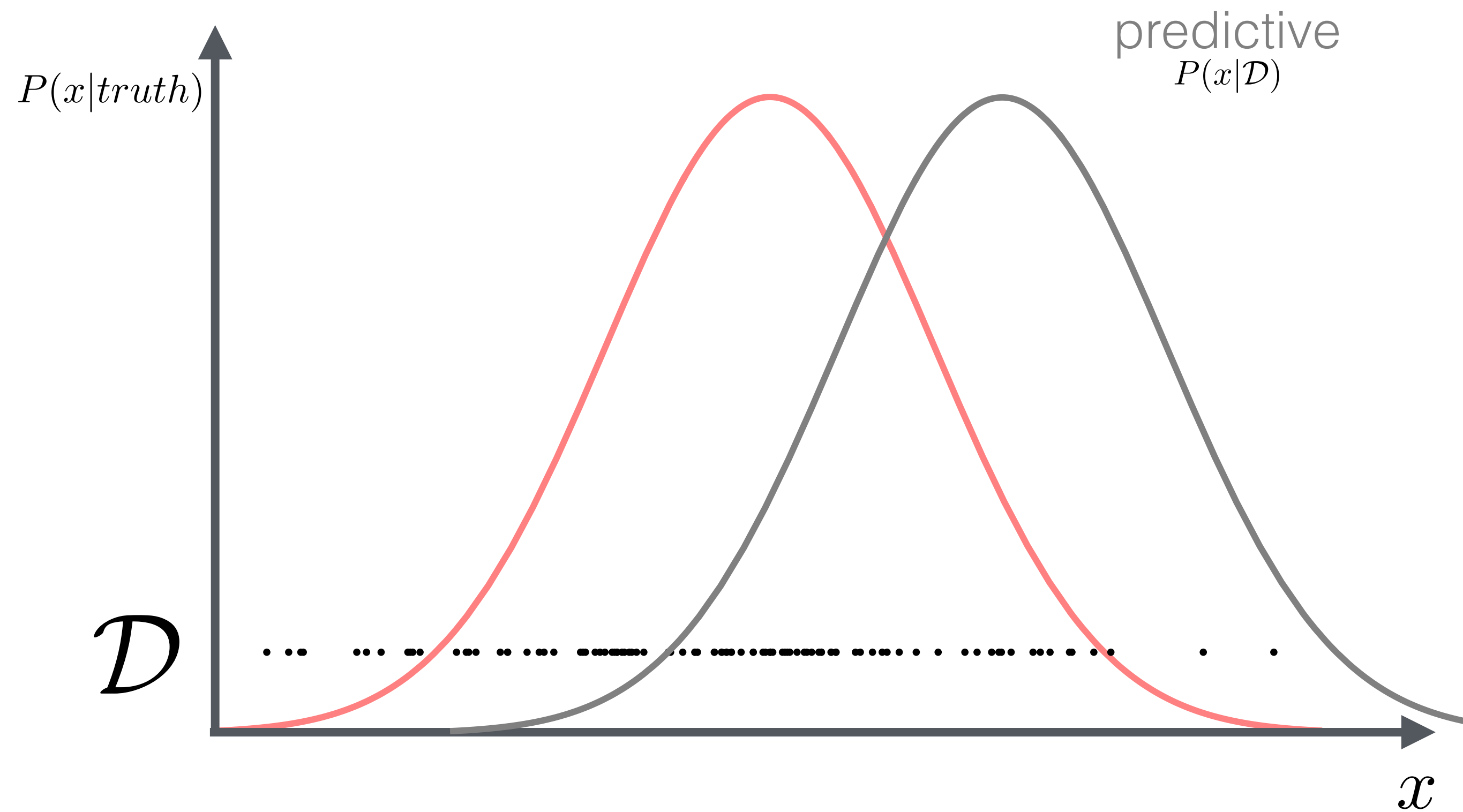
$\mathcal{D}$

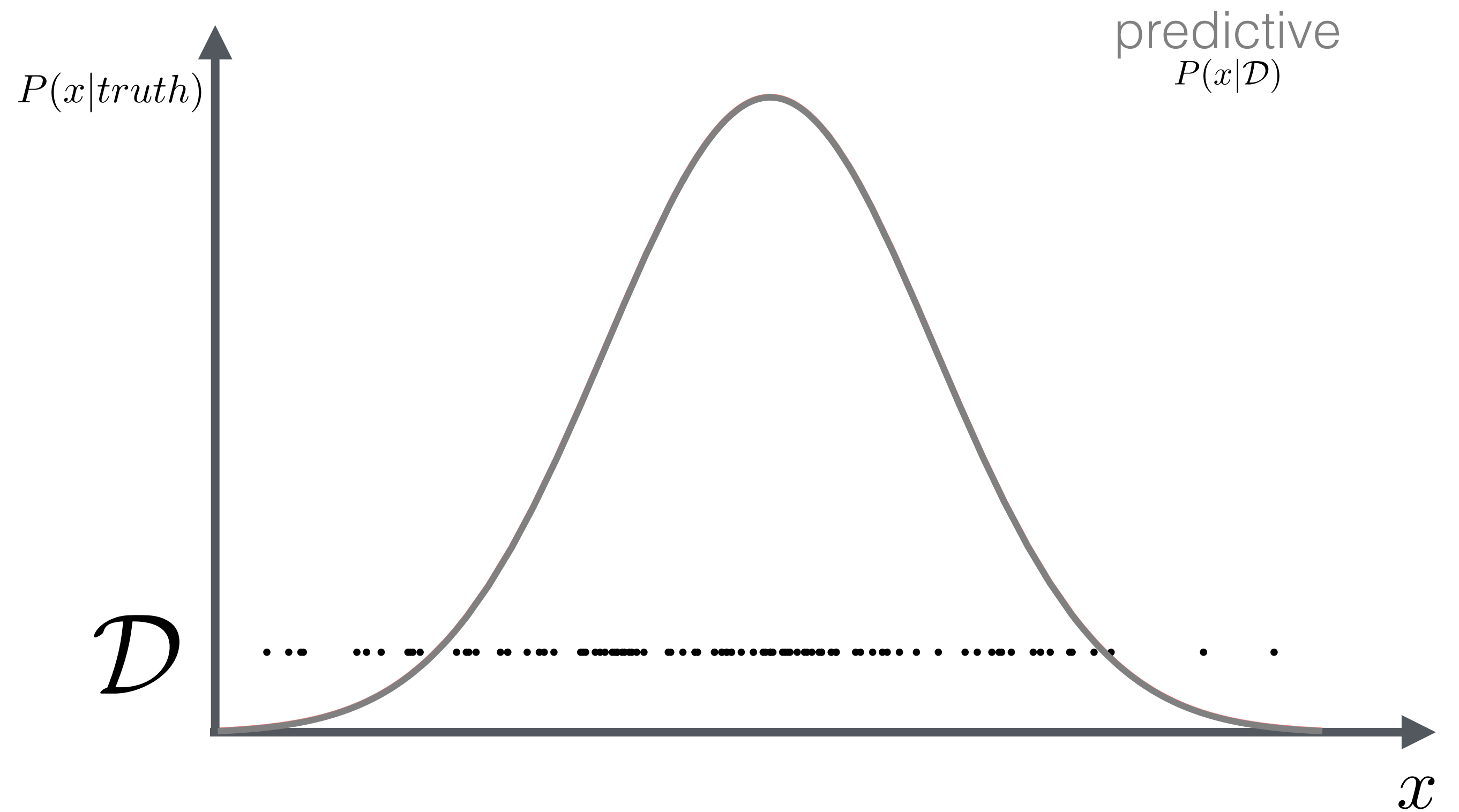


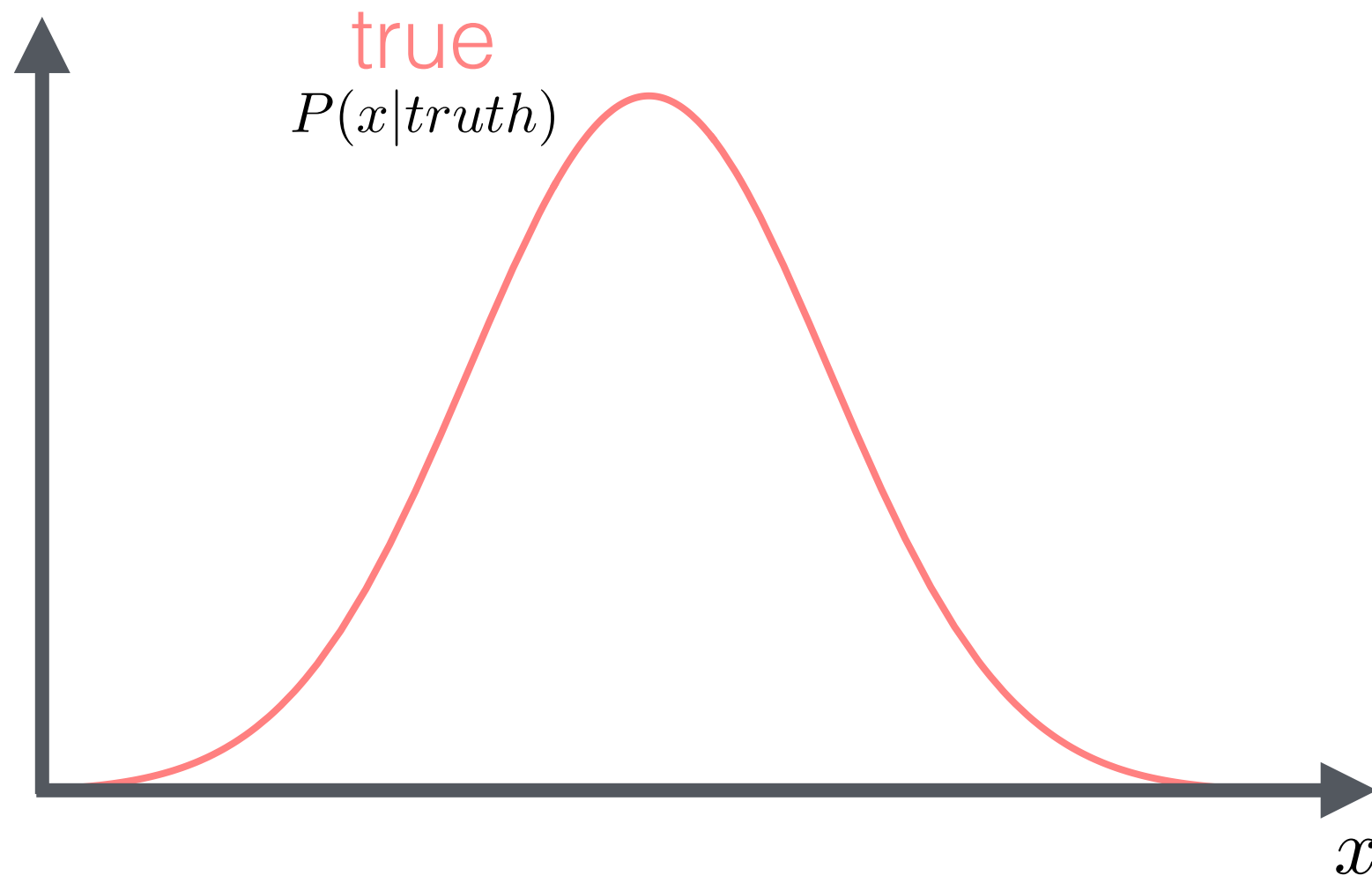
x

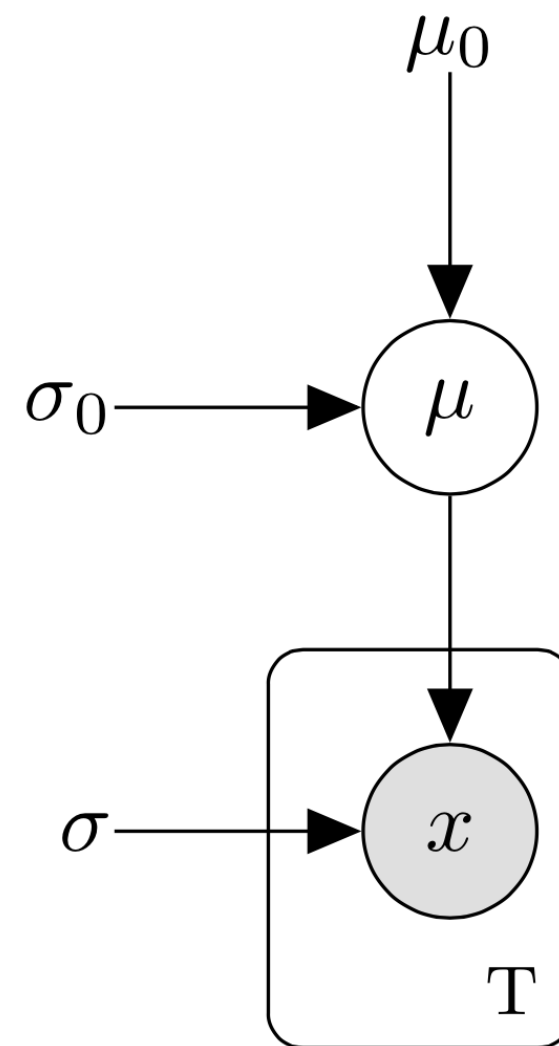
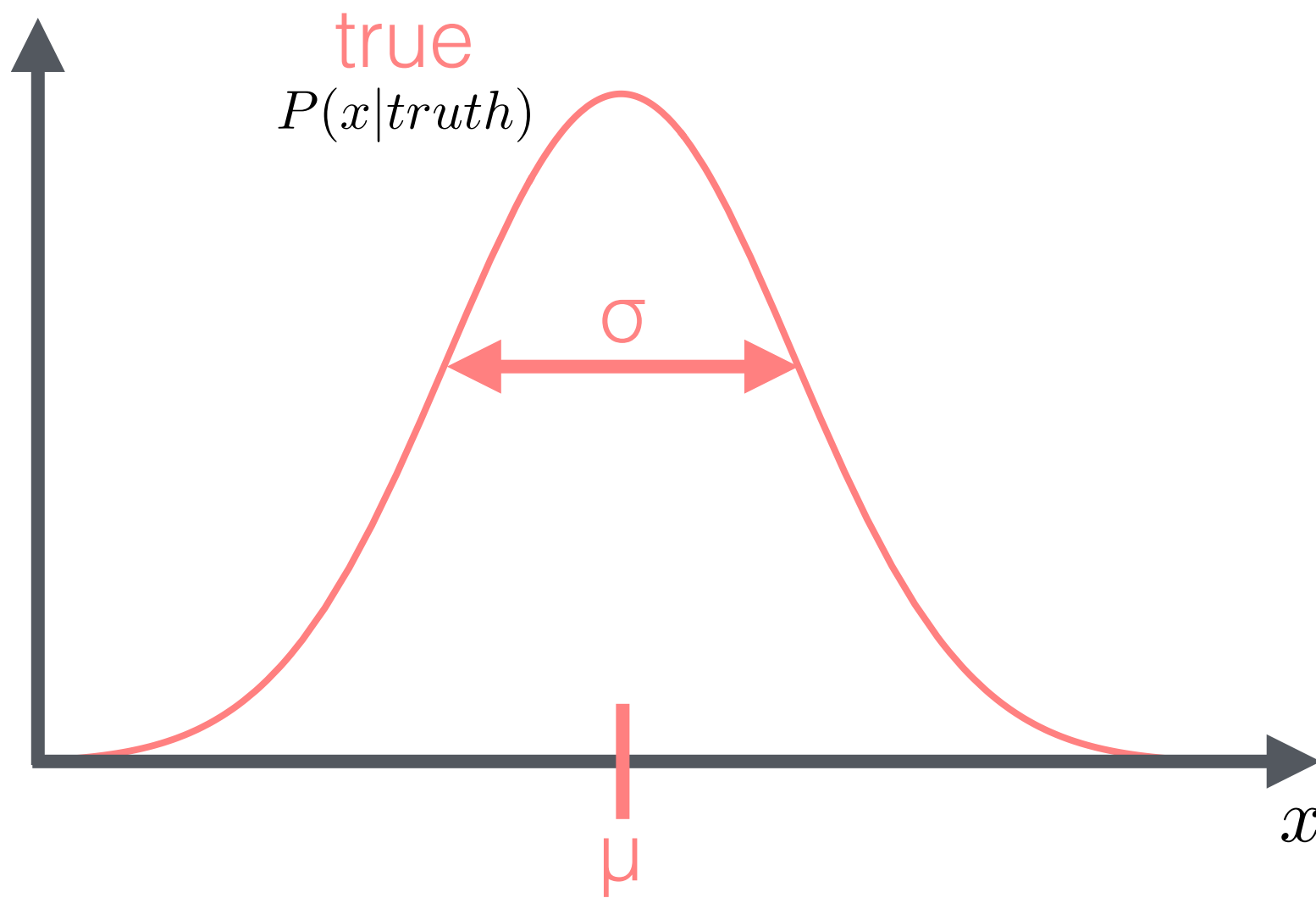


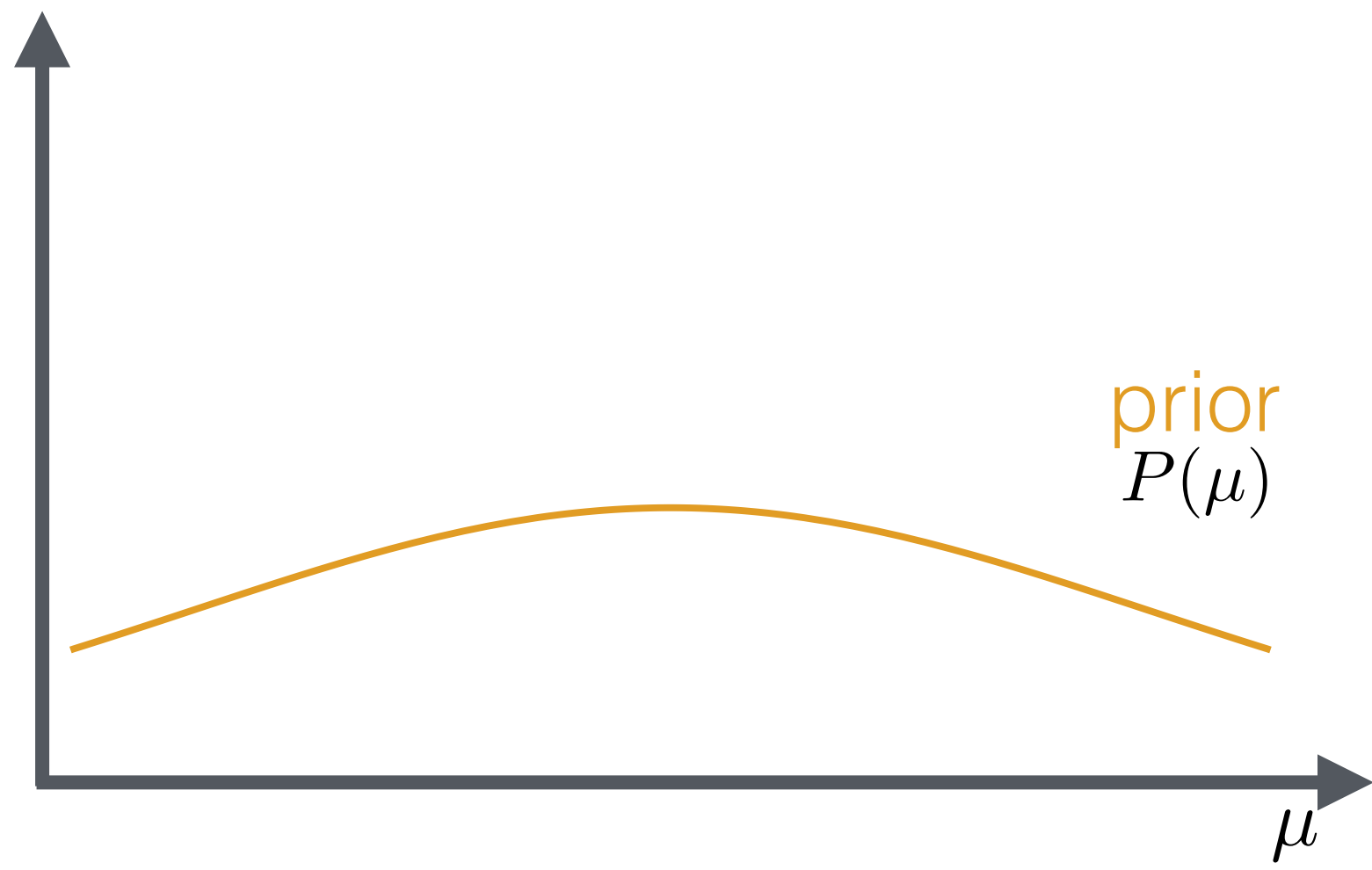
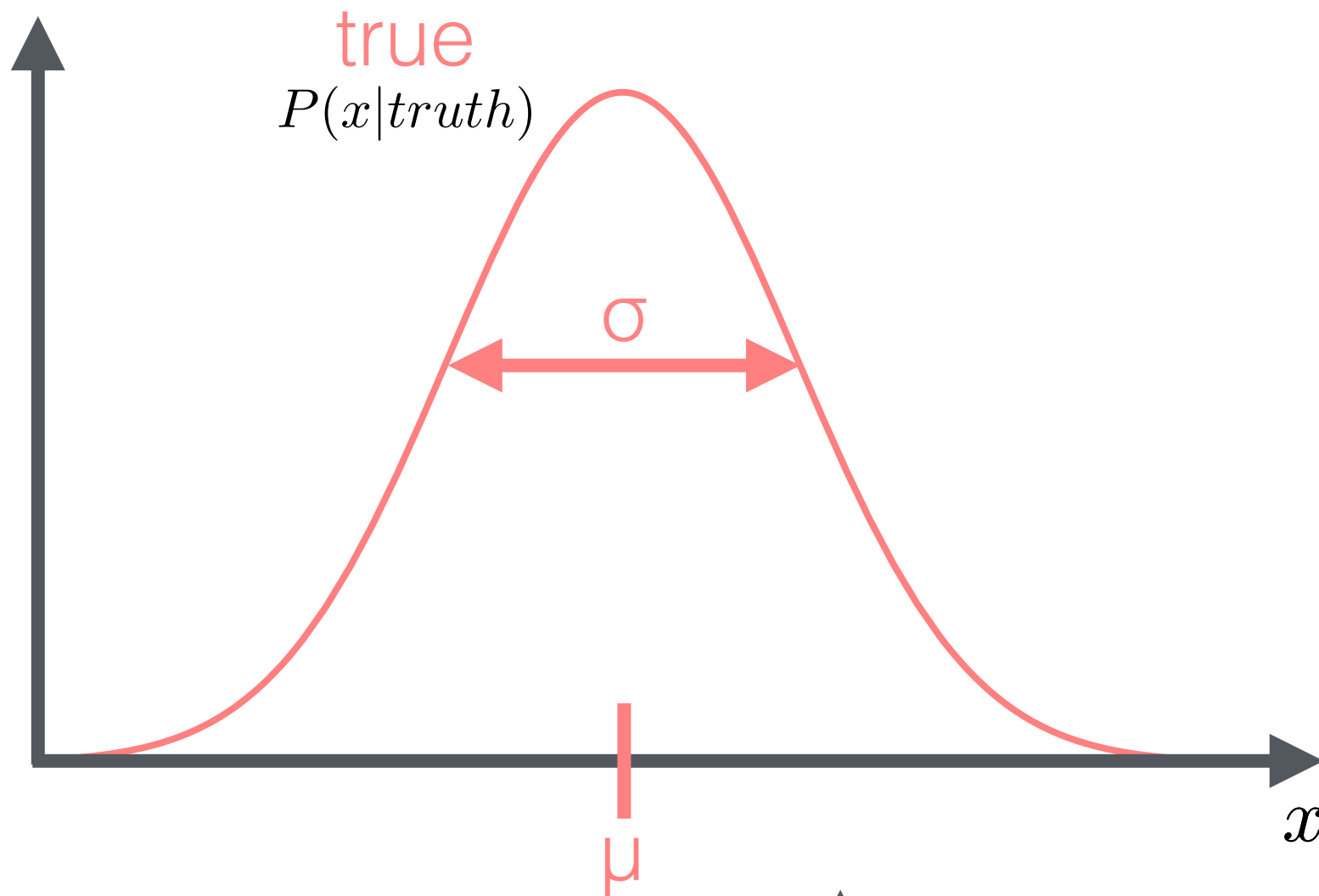


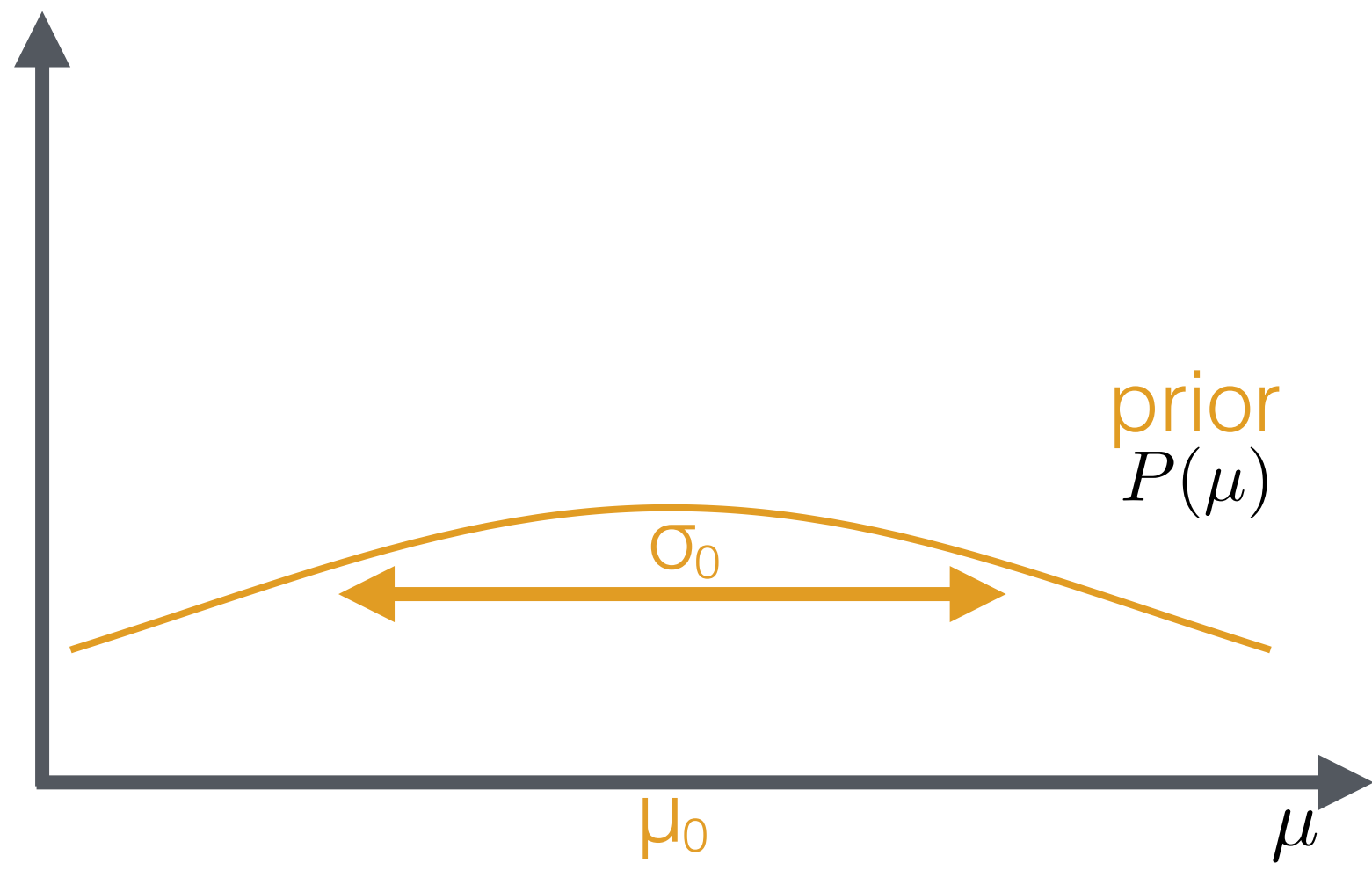
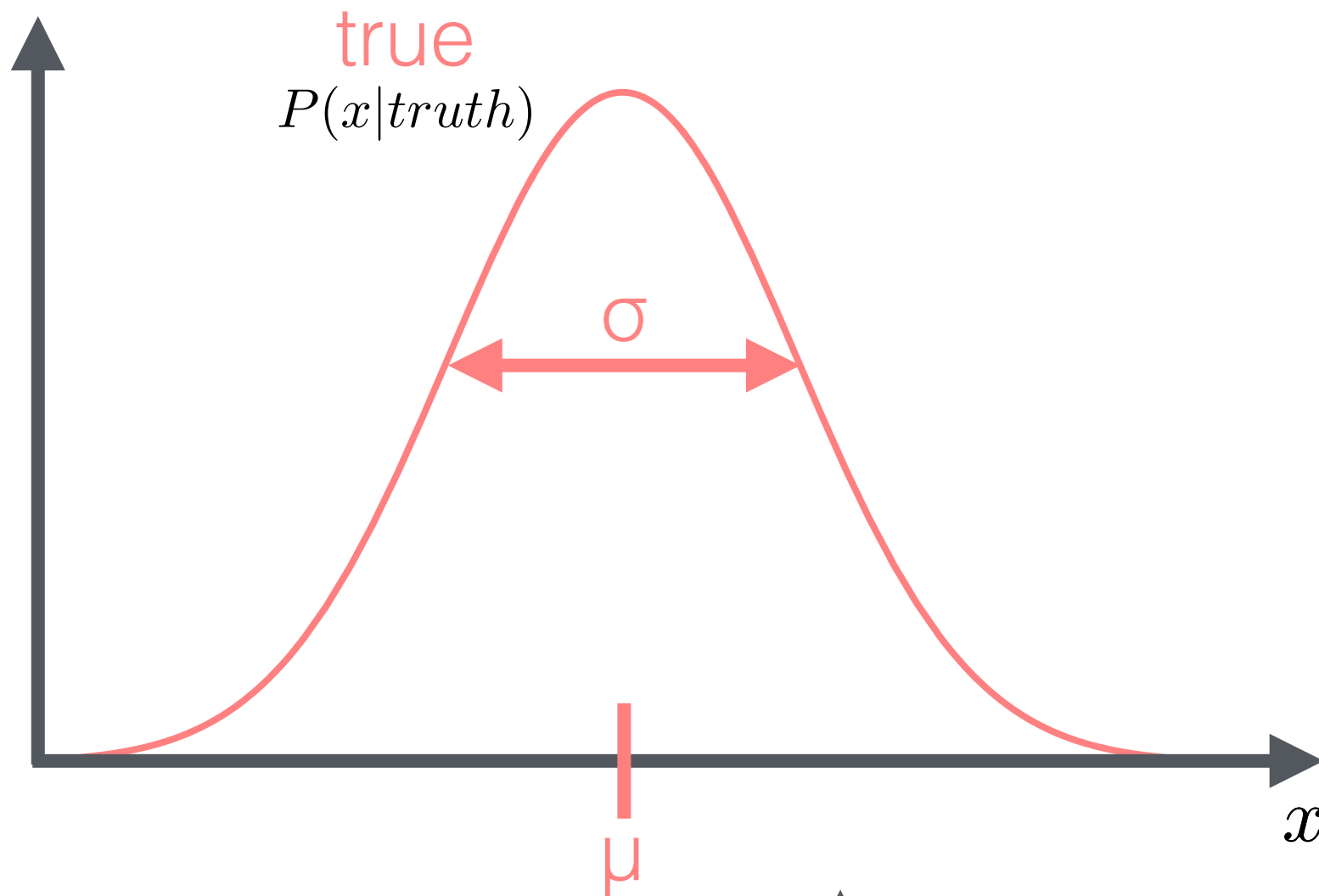


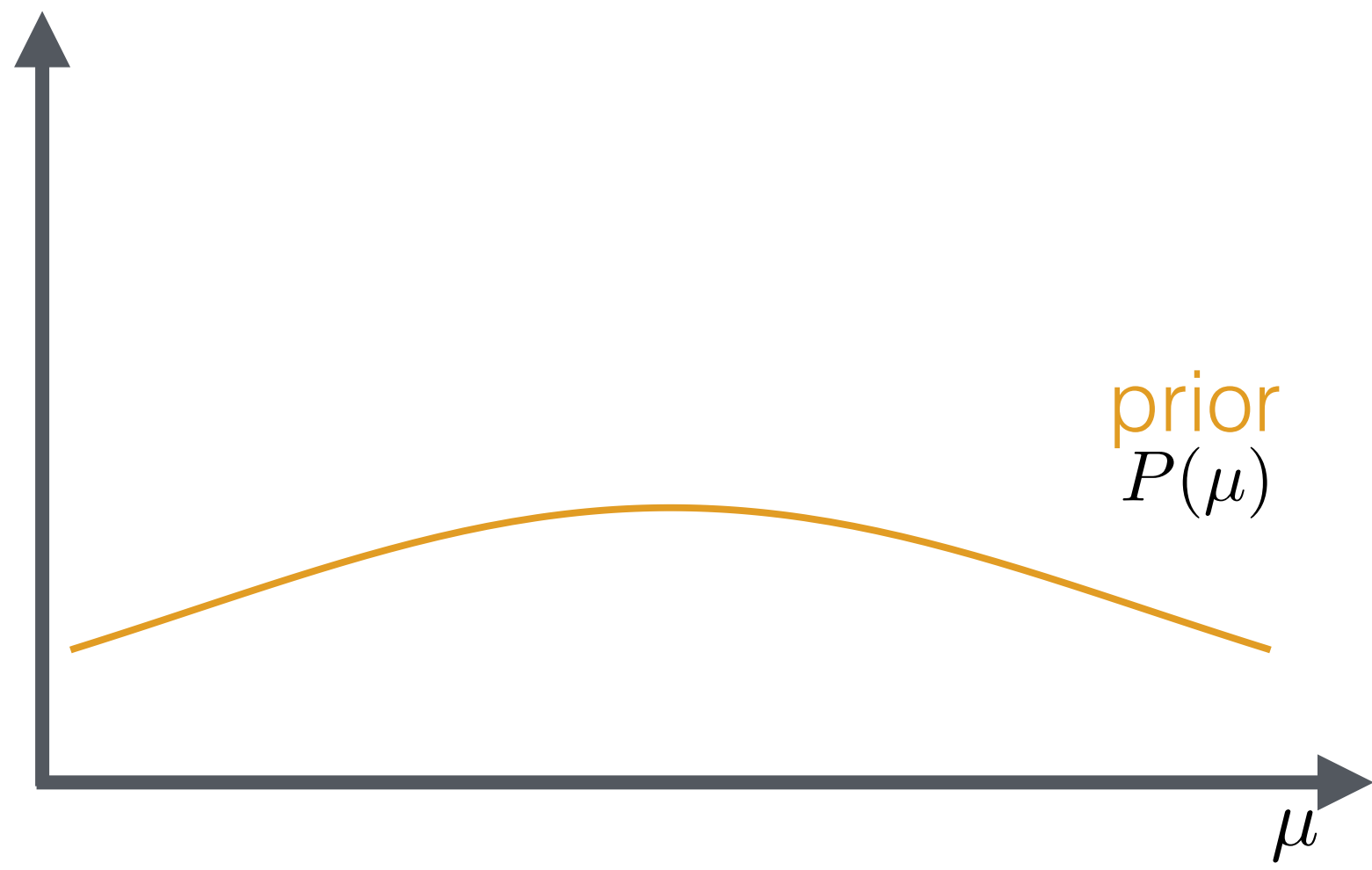
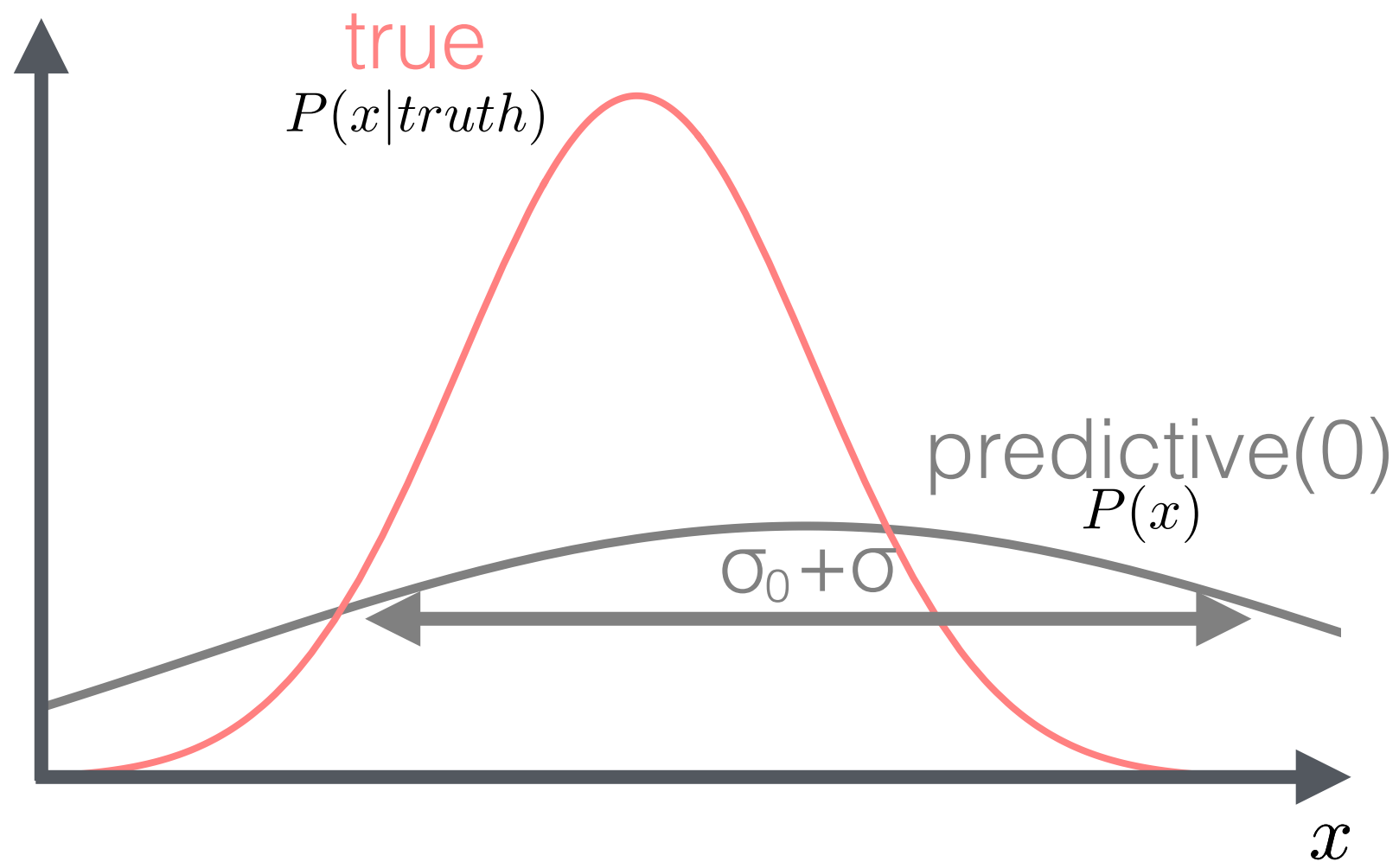


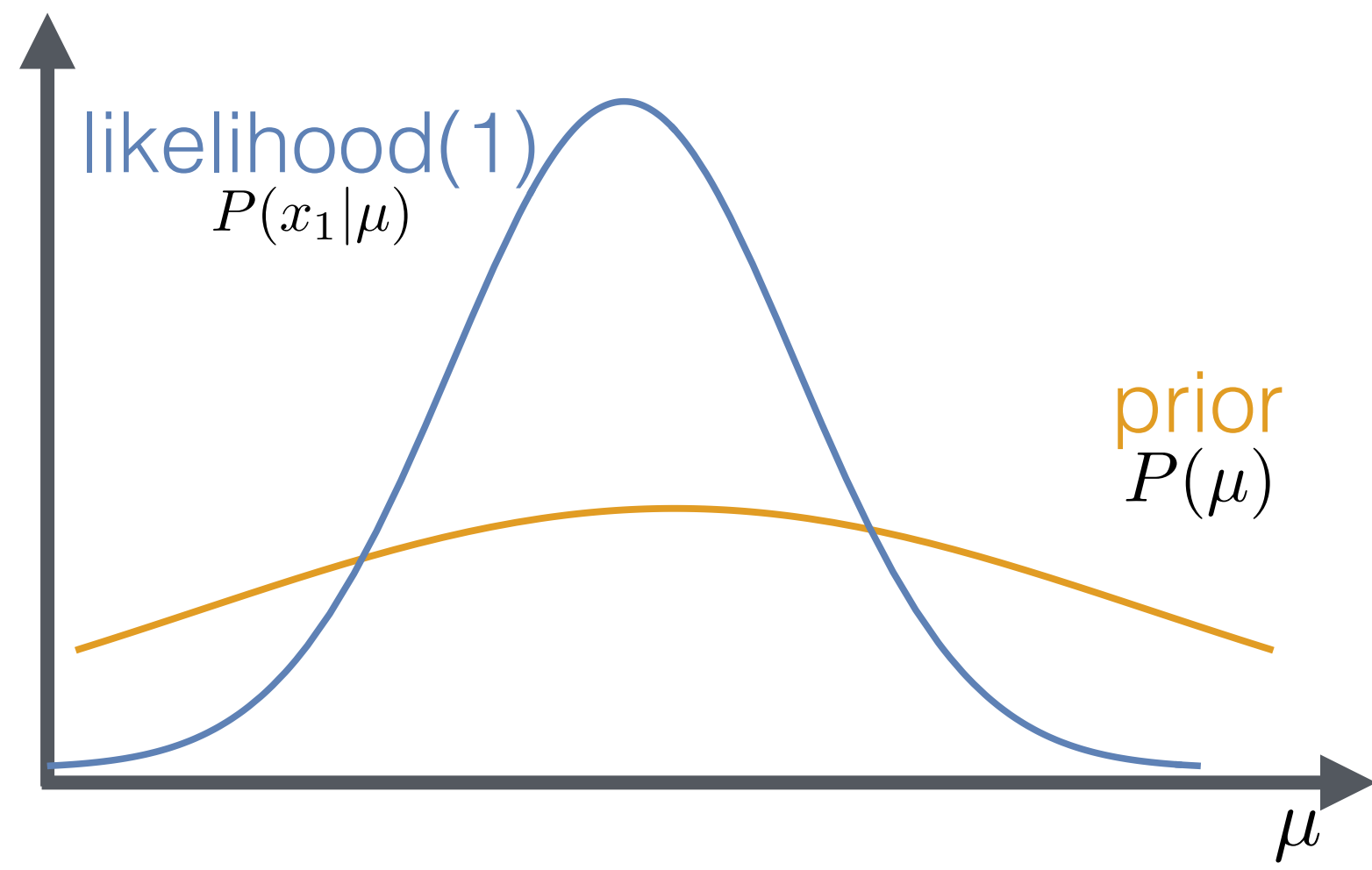
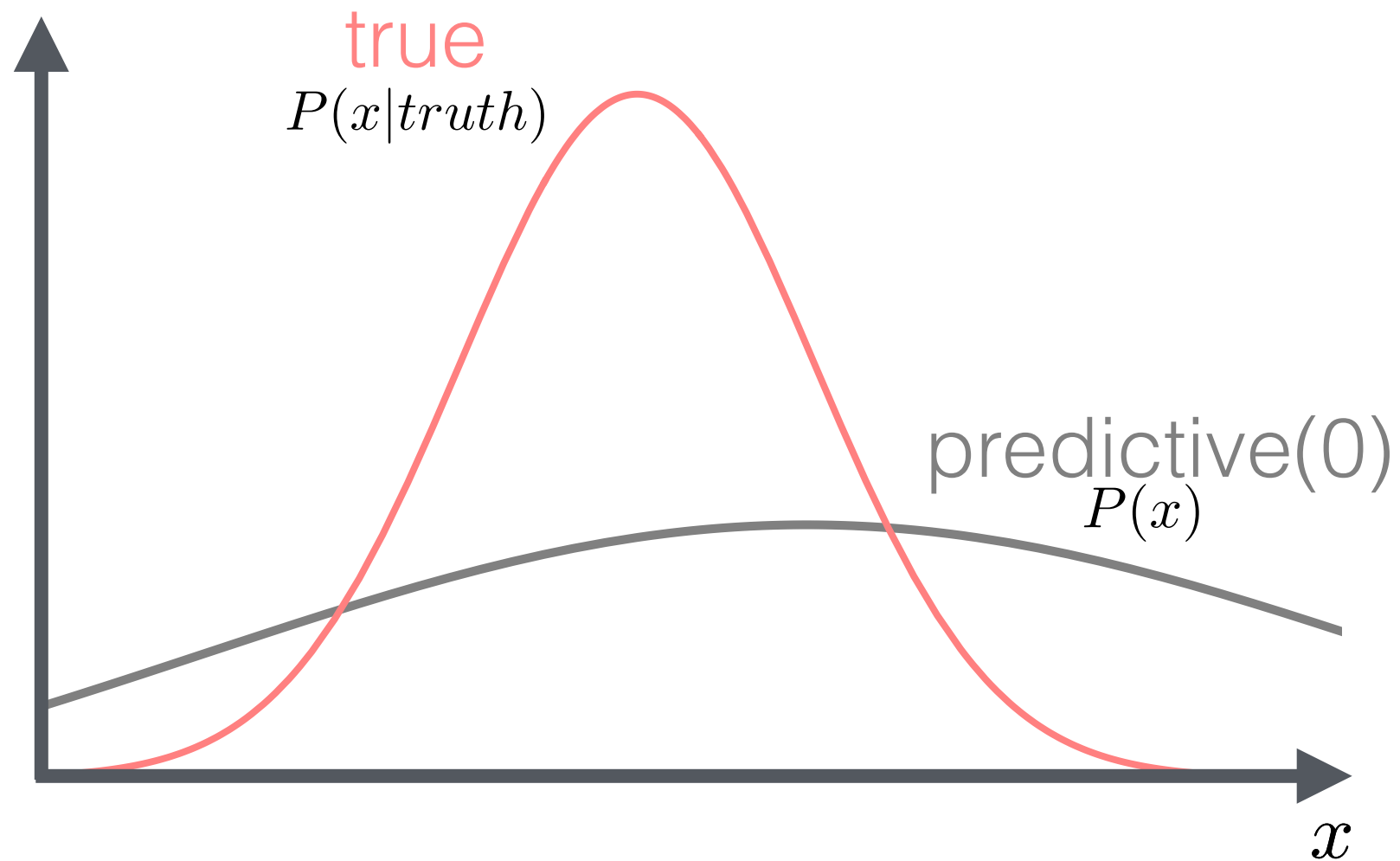


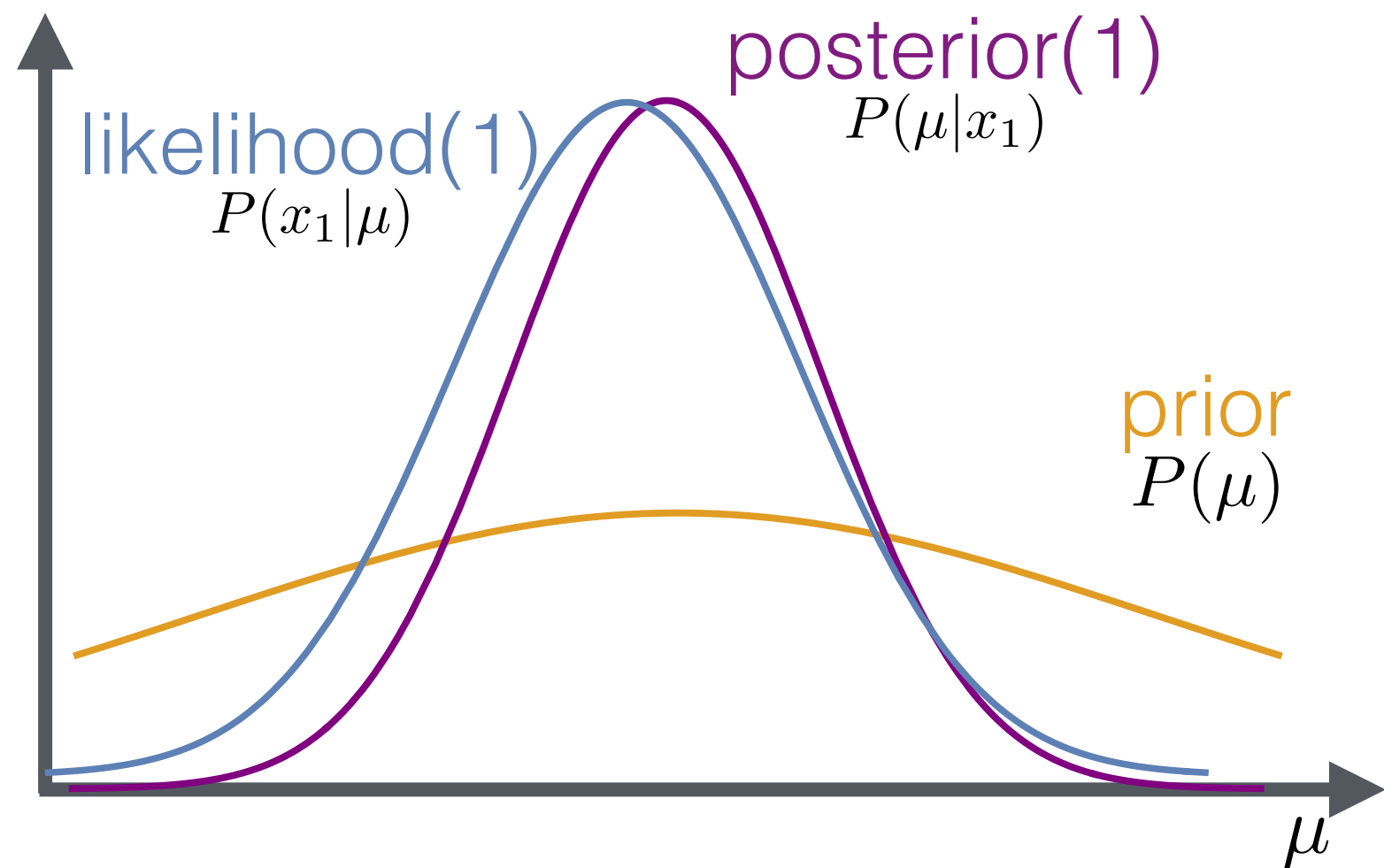
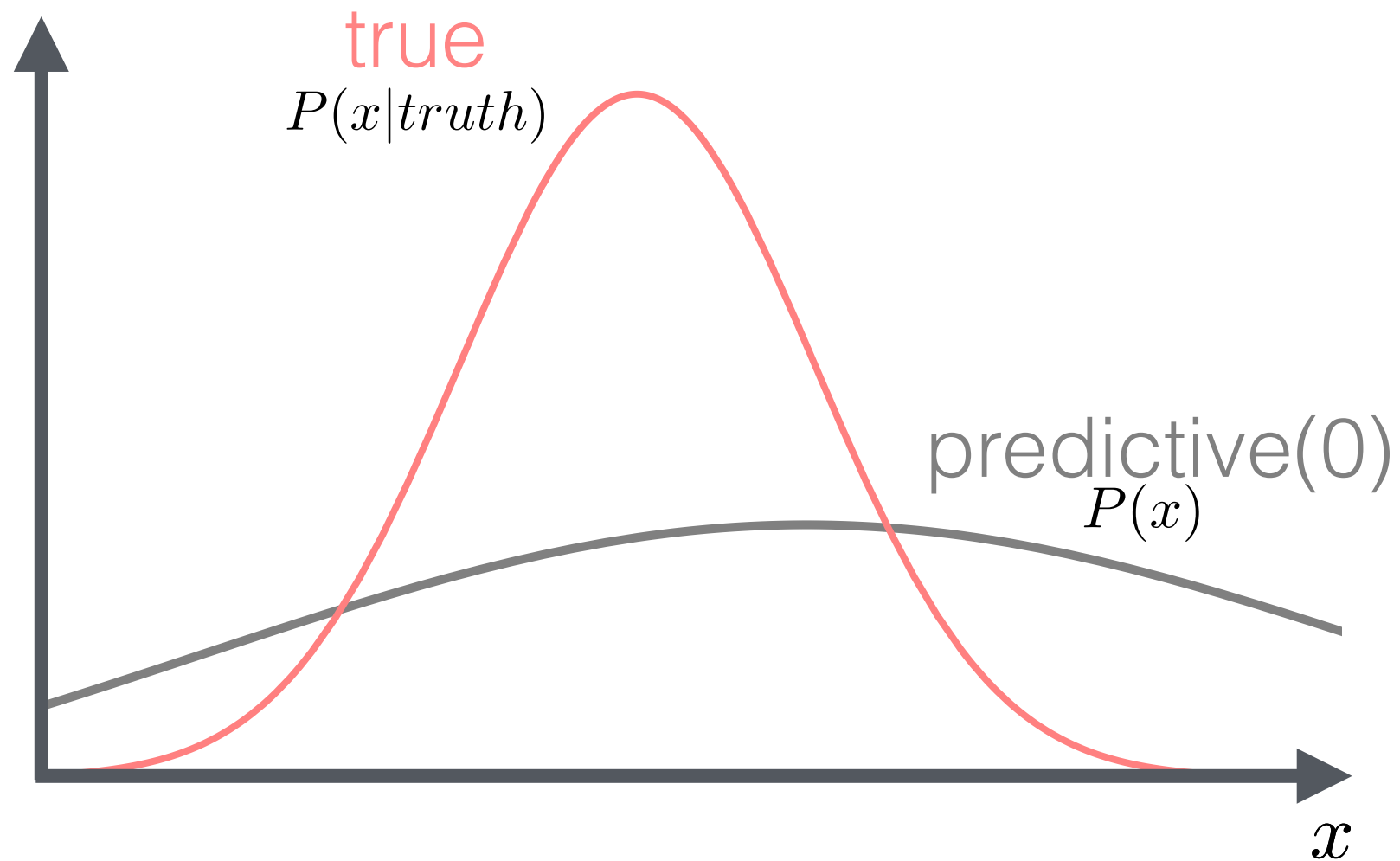


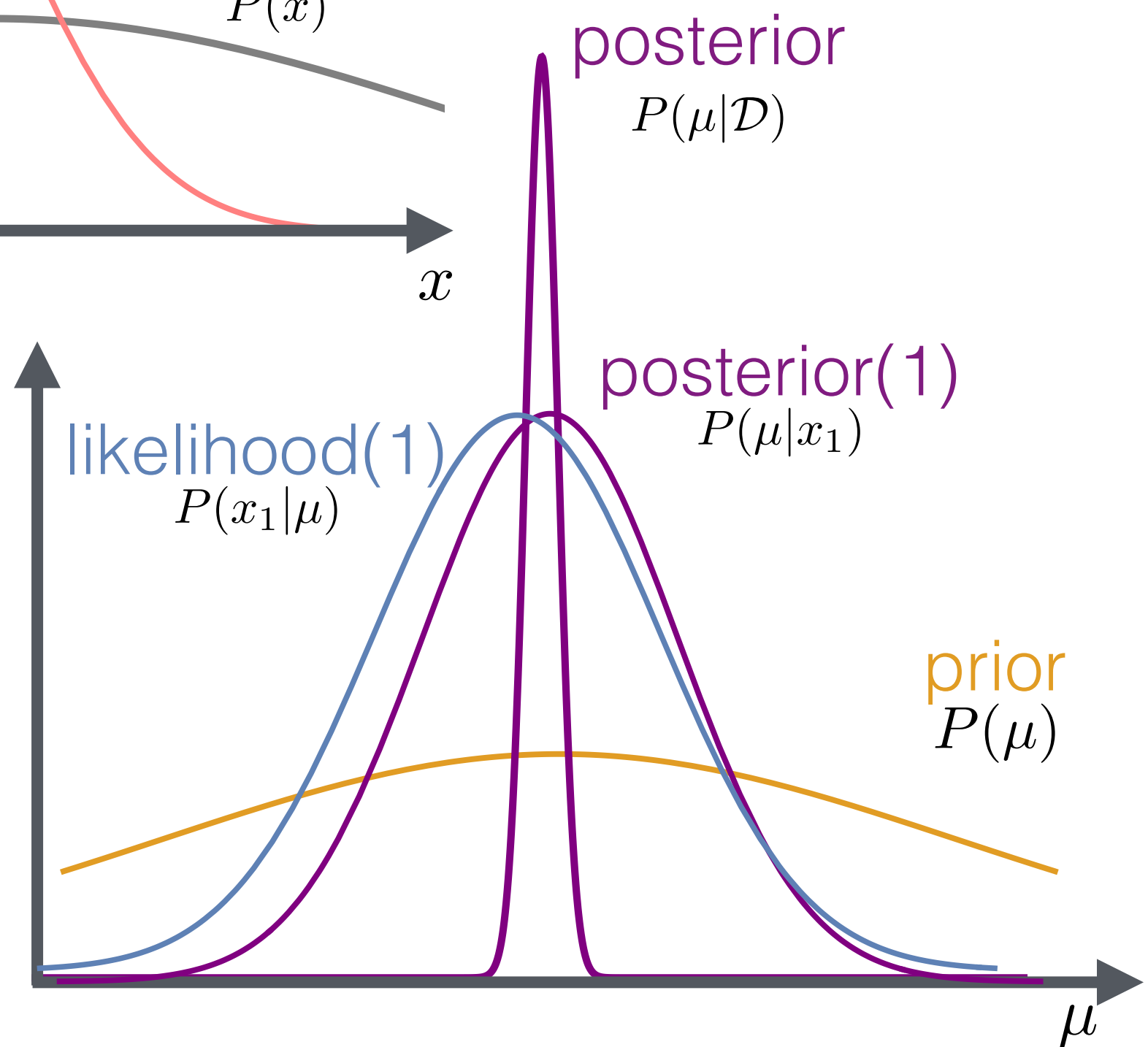
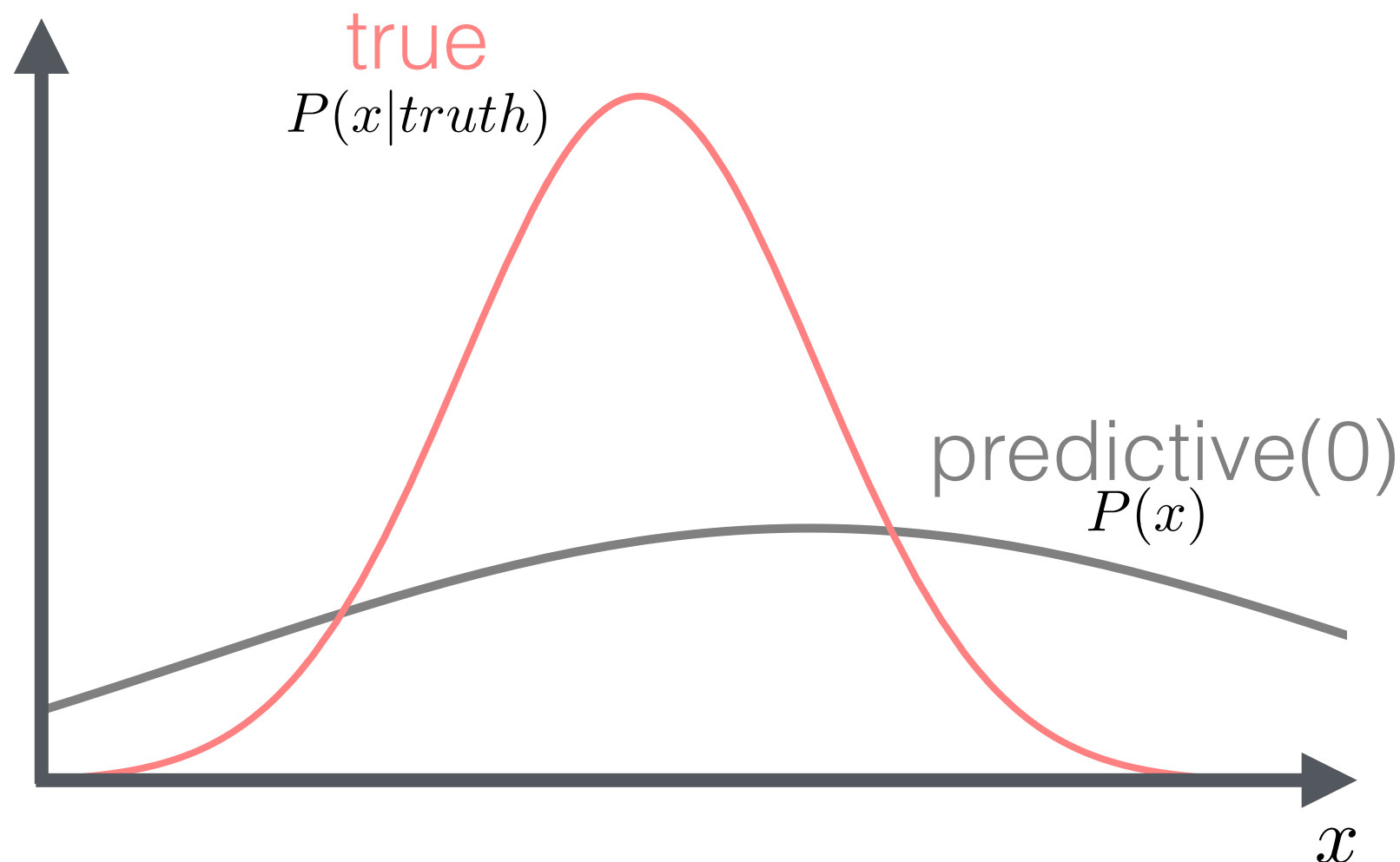


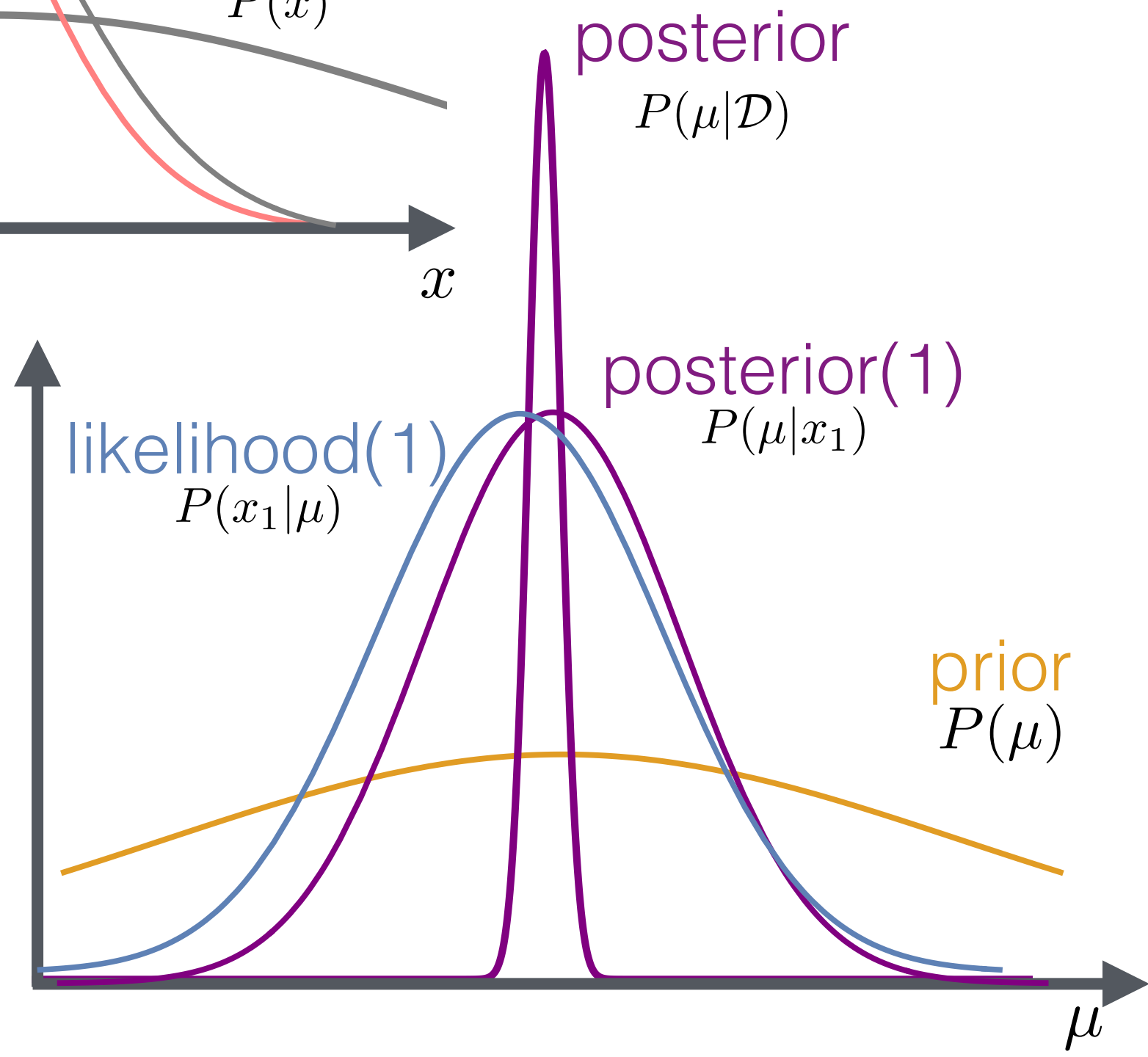
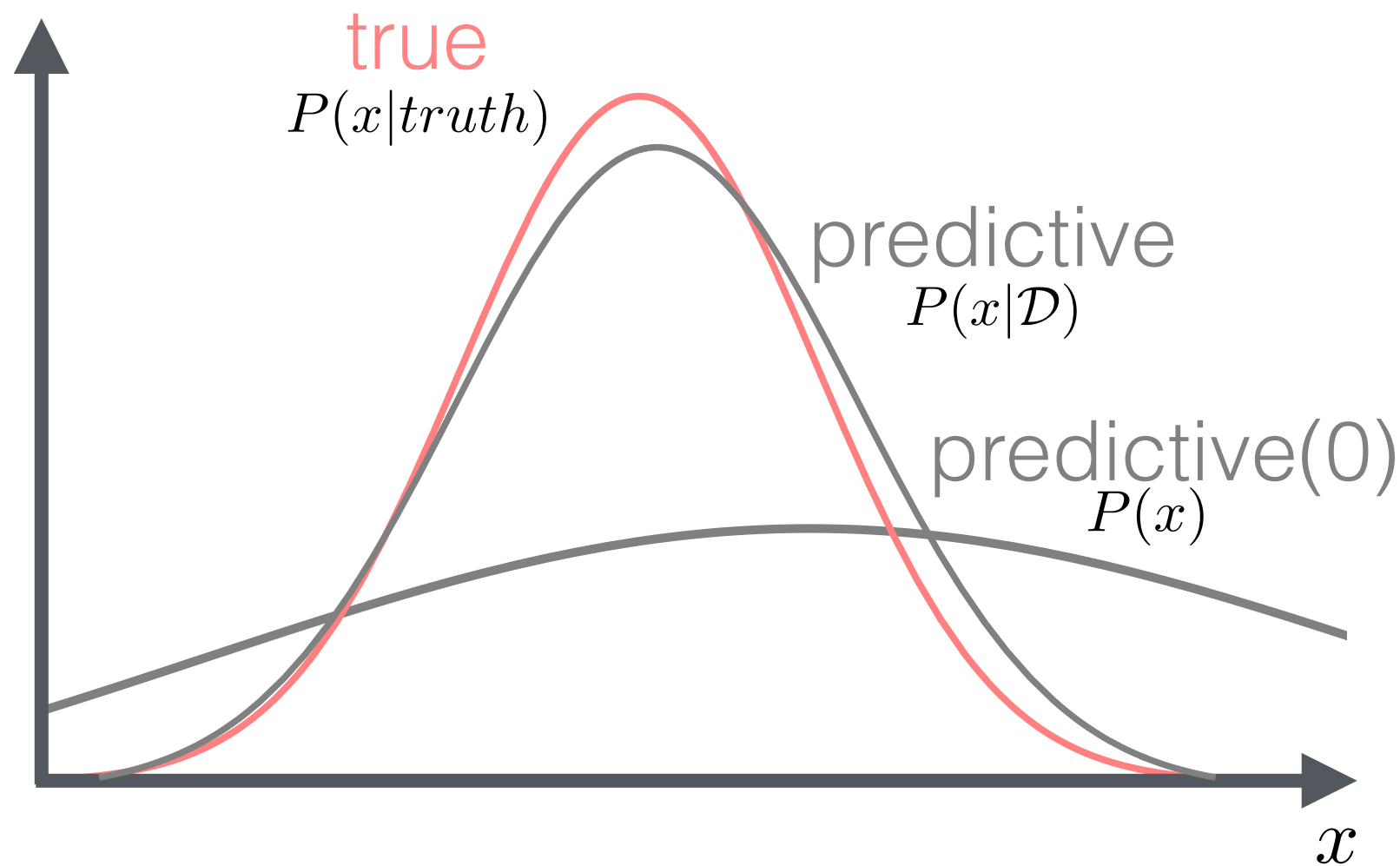




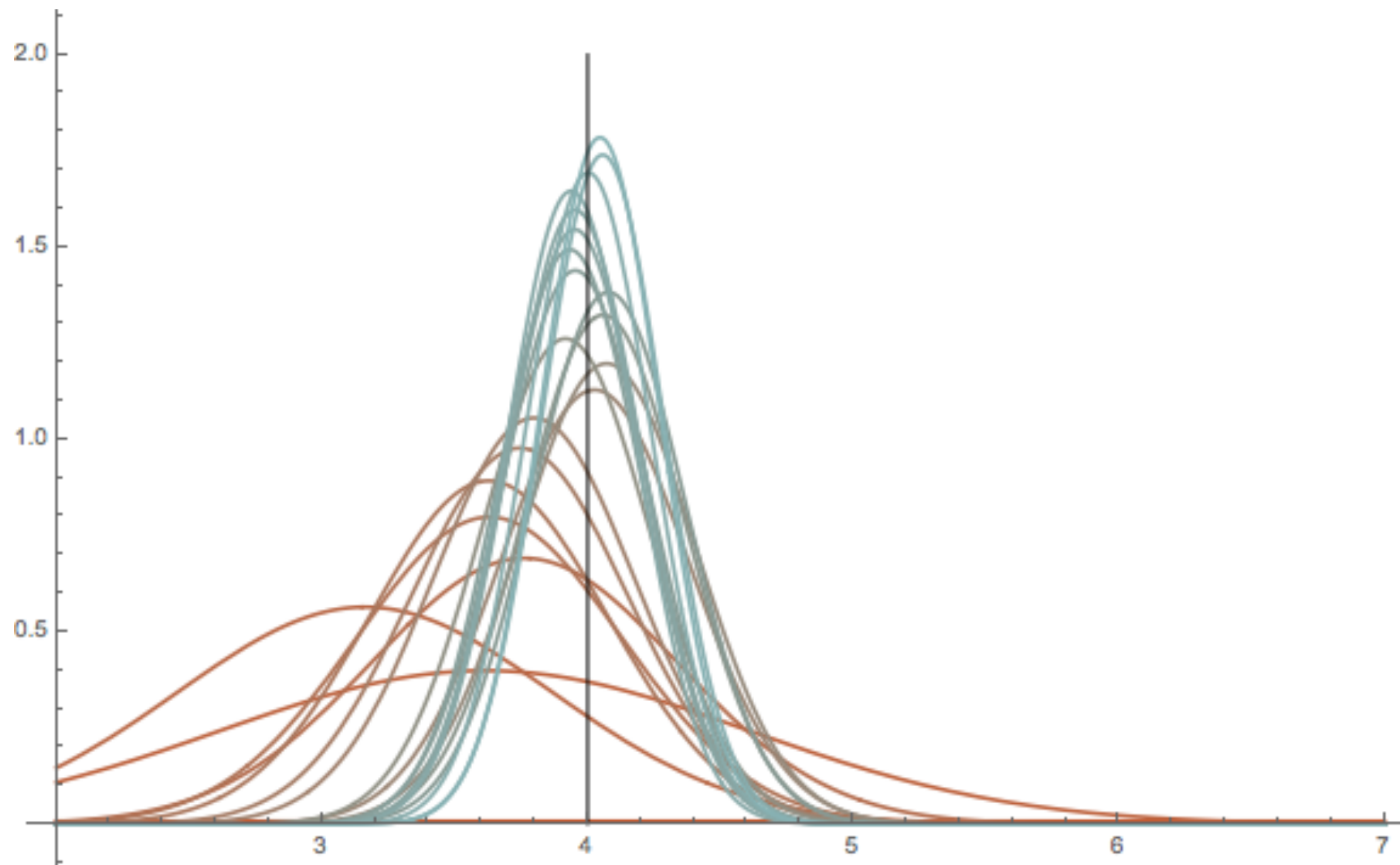








aszimptotikus bizonyosság



a paraméter posterior végtelen adat esetén a valódi paraméterérték körüli delta eloszláshoz konvergál

közelítő inferencia

közelítő inferencia

- az adat és egy adott hipotézistér mellett a posterior eloszlások a legtöbb amit tudunk mondani

közelítő inferencia

- az adat és egy adott hipotézistér mellett a posterior eloszlások a legtöbb amit tudunk mondani
- viszont ezt sokszor nehéz vagy lehetetlen egzaktul kiszámolni, ezért közelítésekre kényszerülünk

közelítő inferencia

- az adat és egy adott hipotézistér mellett a posterior eloszlások a legtöbb amit tudunk mondani
- viszont ezt sokszor nehéz vagy lehetetlen egzaktul kiszámolni, ezért közelítésekre kényszerülünk
 - **pontbecslések**

közelítő inferencia

- az adat és egy adott hipotézistér mellett a posterior eloszlások a legtöbb amit tudunk mondani
- viszont ezt sokszor nehéz vagy lehetetlen egzaktul kiszámolni, ezért közelítésekre kényszerülünk
 - **pontbecslések**
 - sztochasztikus közelítő módszerek (Monte Carlo)

közelítő inferencia

- az adat és egy adott hipotézistér mellett a posterior eloszlások a legtöbb amit tudunk mondani
- viszont ezt sokszor nehéz vagy lehetetlen egzaktul kiszámolni, ezért közelítésekre kényszerülünk
 - **pontbecslések**
 - sztochasztikus közelítő módszerek (Monte Carlo)
 - **mintavételezés**

közelítő inferencia

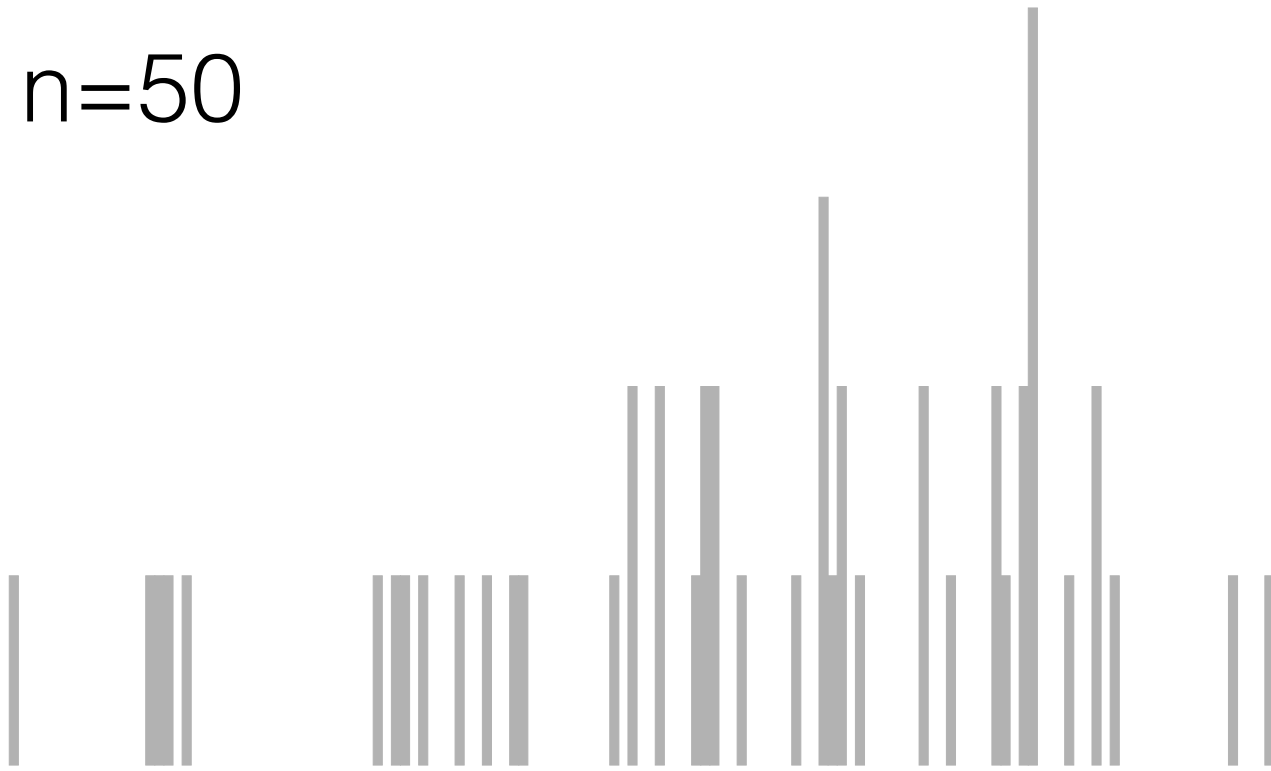
- az adat és egy adott hipotézistér mellett a posterior eloszlások a legtöbb amit tudunk mondani
- viszont ezt sokszor nehéz vagy lehetetlen egzaktul kiszámolni, ezért közelítésekre kényszerülünk
 - **pontbecslések**
 - sztochasztikus közelítő módszerek (Monte Carlo)
 - **mintavételezés**
 - aszimptotikusan (végtelen sok ideig futtatva) egzaktak

közelítő inferencia

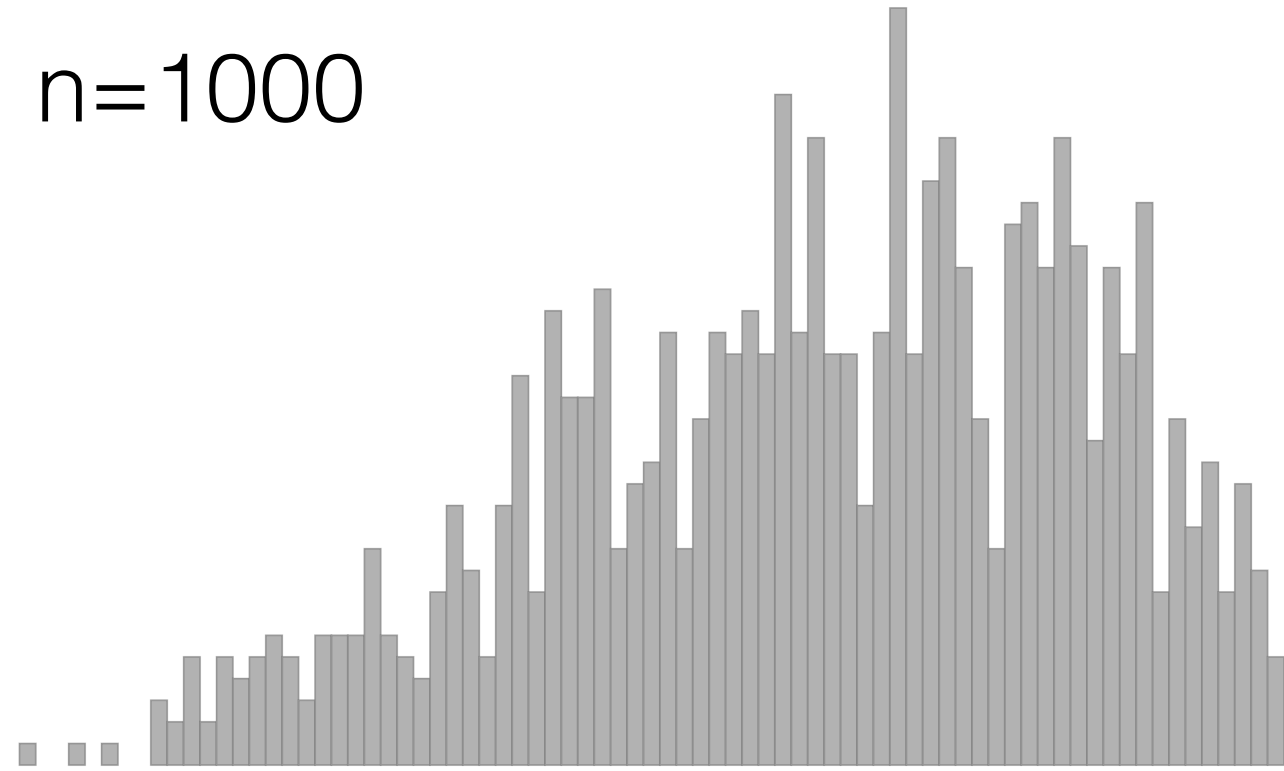
- az adat és egy adott hipotézistér mellett a posterior eloszlások a legtöbb amit tudunk mondani
- viszont ezt sokszor nehéz vagy lehetetlen egzaktul kiszámolni, ezért közelítésekre kényszerülünk
 - **pontbecslések**
 - sztochasztikus közelítő módszerek (Monte Carlo)
 - **mintavételezés**
 - aszimptotikusan (végtelen sok ideig futtatva) egzaktak

Monte Carlo

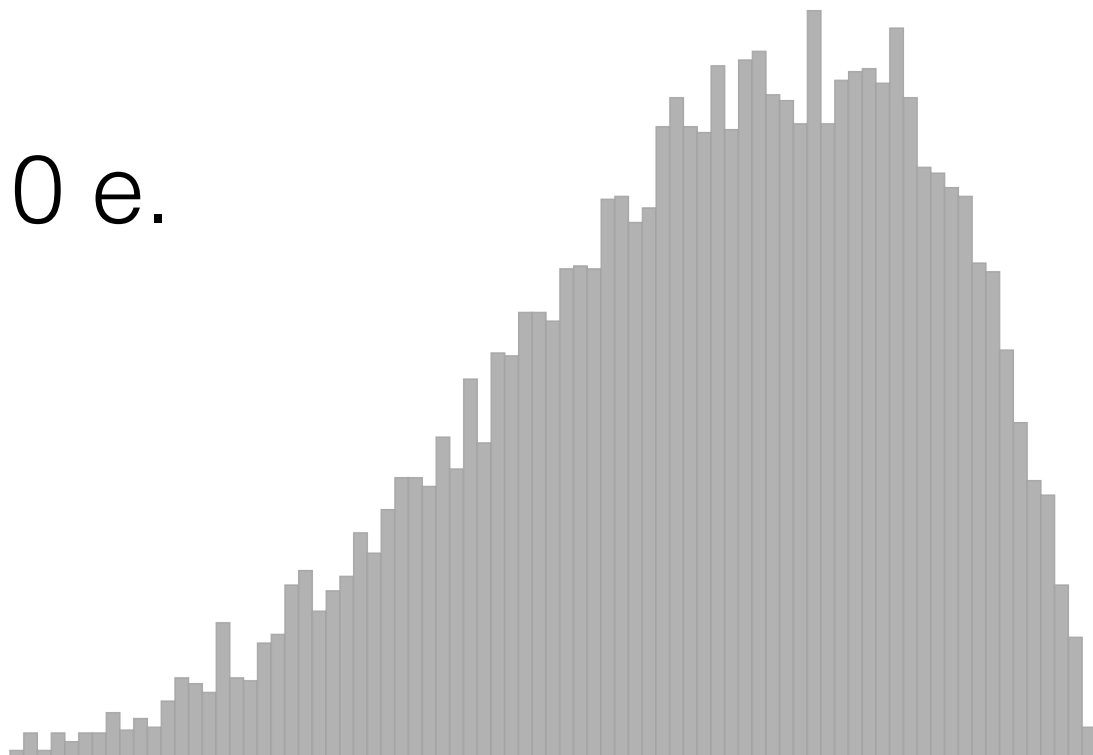
n=50



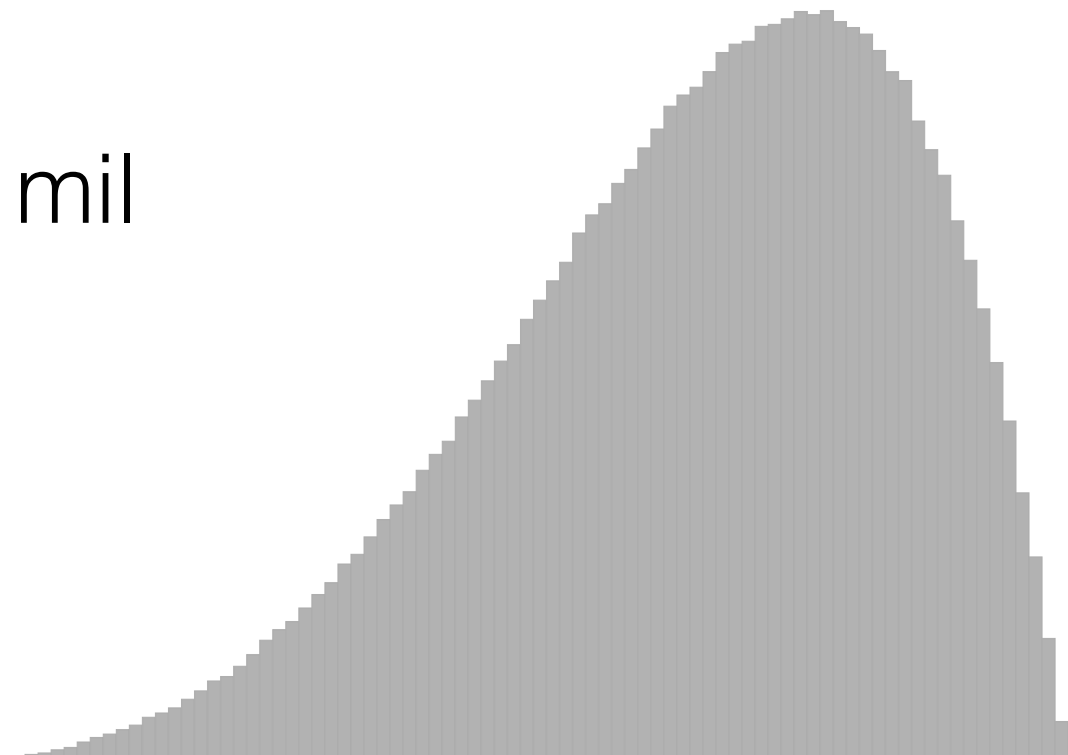
n=1000



n=10 e.



n=1 mil



közelítő inferencia

- az adat és egy adott hipotézistér mellett a posterior eloszlások a legtöbb amit tudunk mondani
- viszont ezt sokszor nehéz vagy lehetetlen egzaktul kiszámolni, ezért közelítésekre kényszerülünk
 - **pontbecslések**
 - sztochasztikus közelítő módszerek (Monte Carlo)
 - **mintavételezés**
 - aszimptotikusan (végtelen sok ideig futtatva) egzaktak

közelítő inferencia

- az adat és egy adott hipotézistér mellett a posterior eloszlások a legtöbb amit tudunk mondani
- viszont ezt sokszor nehéz vagy lehetetlen egzaktul kiszámolni, ezért közelítésekre kényszerülünk
 - **pontbecslések**
 - sztochasztikus közelítő módszerek (Monte Carlo)
 - **mintavételezés**
 - aszimptotikusan (végtelen sok ideig futtatva) egzaktak
 - determinisztikus közelítő módszerek

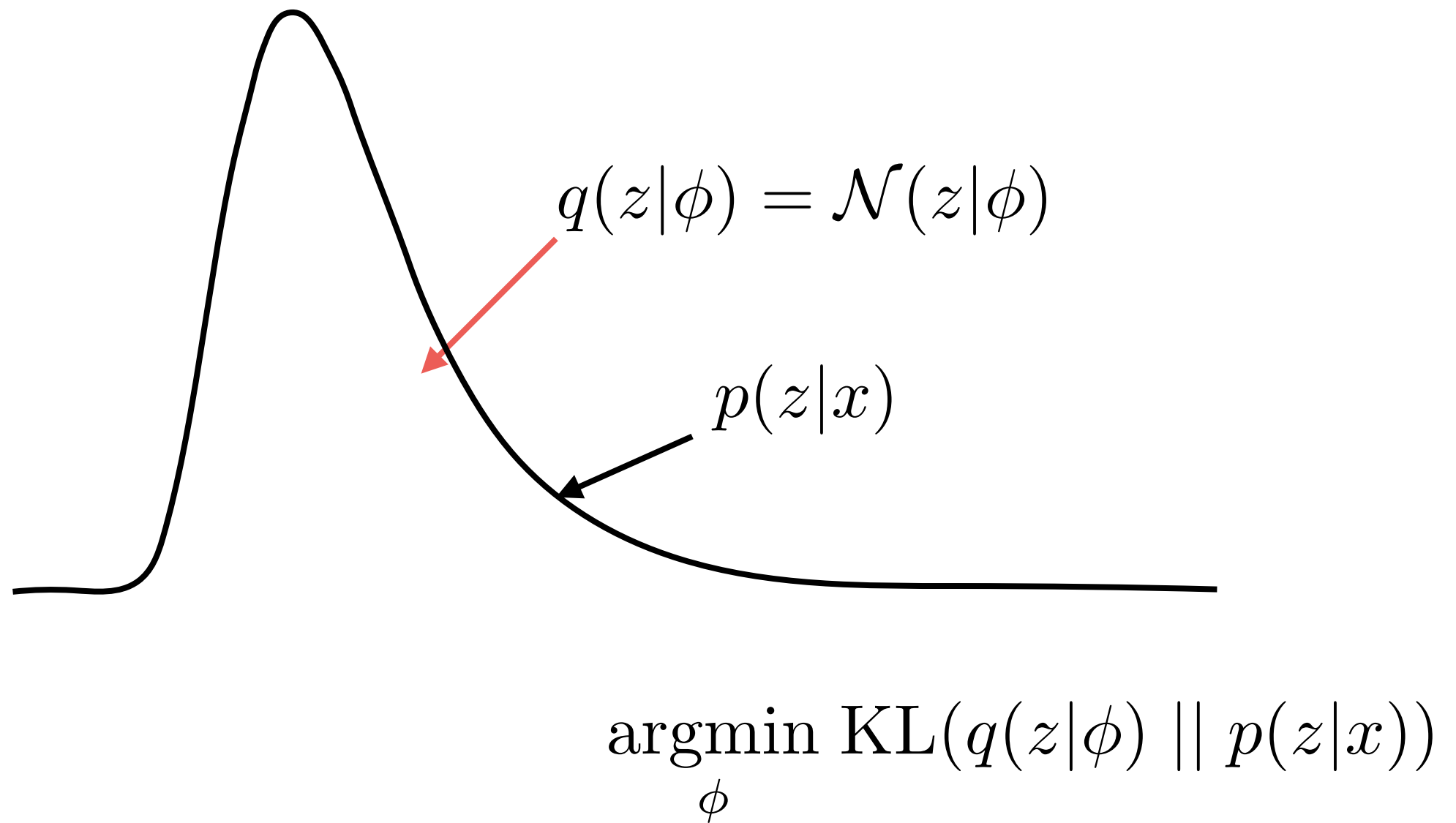
közelítő inferencia

- az adat és egy adott hipotézistér mellett a posterior eloszlások a legtöbb amit tudunk mondani
- viszont ezt sokszor nehéz vagy lehetetlen egzaktul kiszámolni, ezért közelítésekre kényszerülünk
 - **pontbecslések**
 - sztochasztikus közelítő módszerek (Monte Carlo)
 - **mintavételezés**
 - aszimptotikusan (végtelen sok ideig futtatva) egzaktak
 - determinisztikus közelítő módszerek
 - pl: **variációs** Bayes

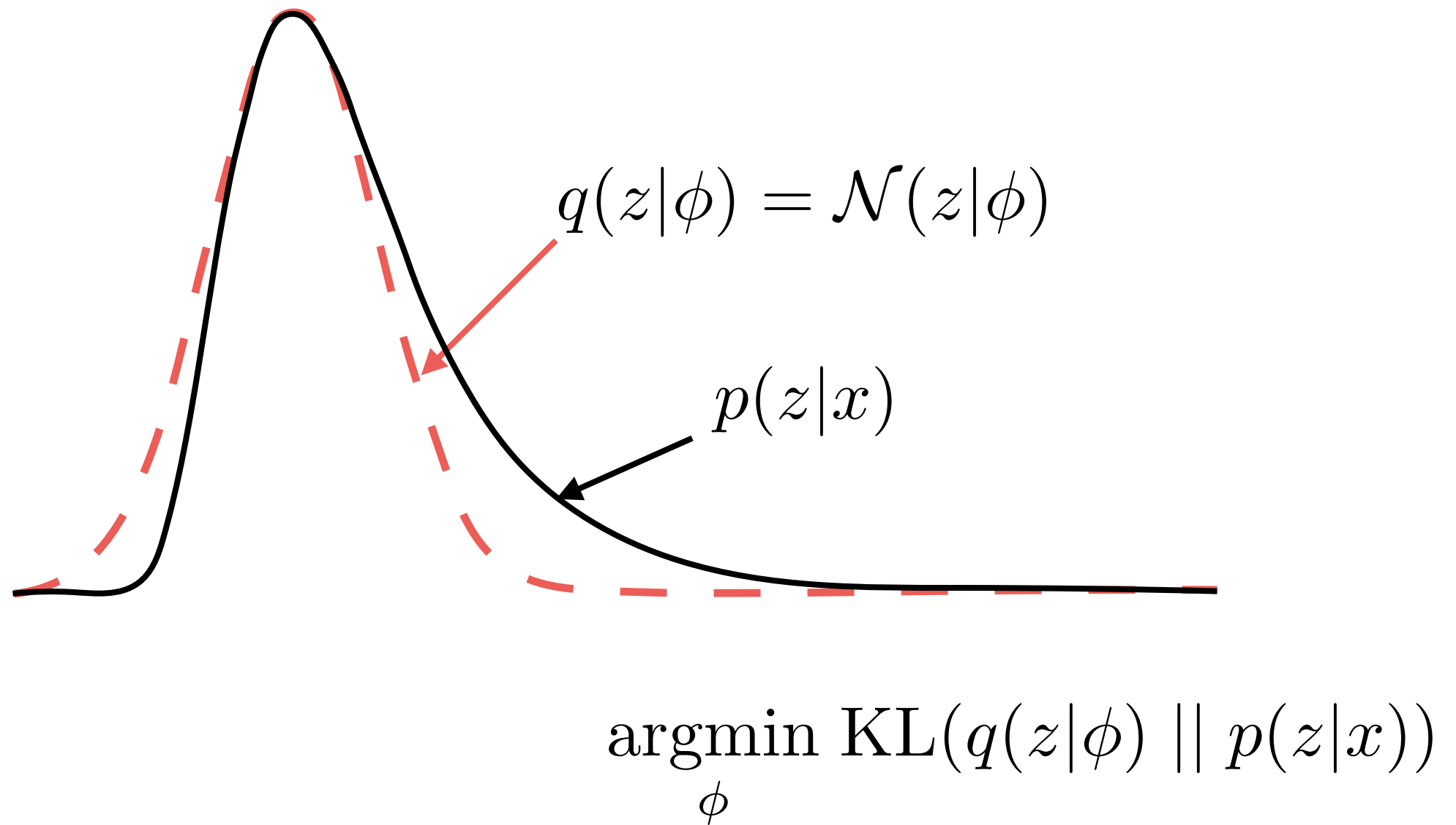
közelítő inferencia

- az adat és egy adott hipotézistér mellett a posterior eloszlások a legtöbb amit tudunk mondani
- viszont ezt sokszor nehéz vagy lehetetlen egzaktul kiszámolni, ezért közelítésekre kényszerülünk
 - **pontbecslések**
 - sztochasztikus közelítő módszerek (Monte Carlo)
 - **mintavételezés**
 - aszimptotikusan (végtelen sok ideig futtatva) egzaktak
 - determinisztikus közelítő módszerek
 - pl: **variációs** Bayes
 - nem kell végtelen sok idő, de sosem egzakt eredmény

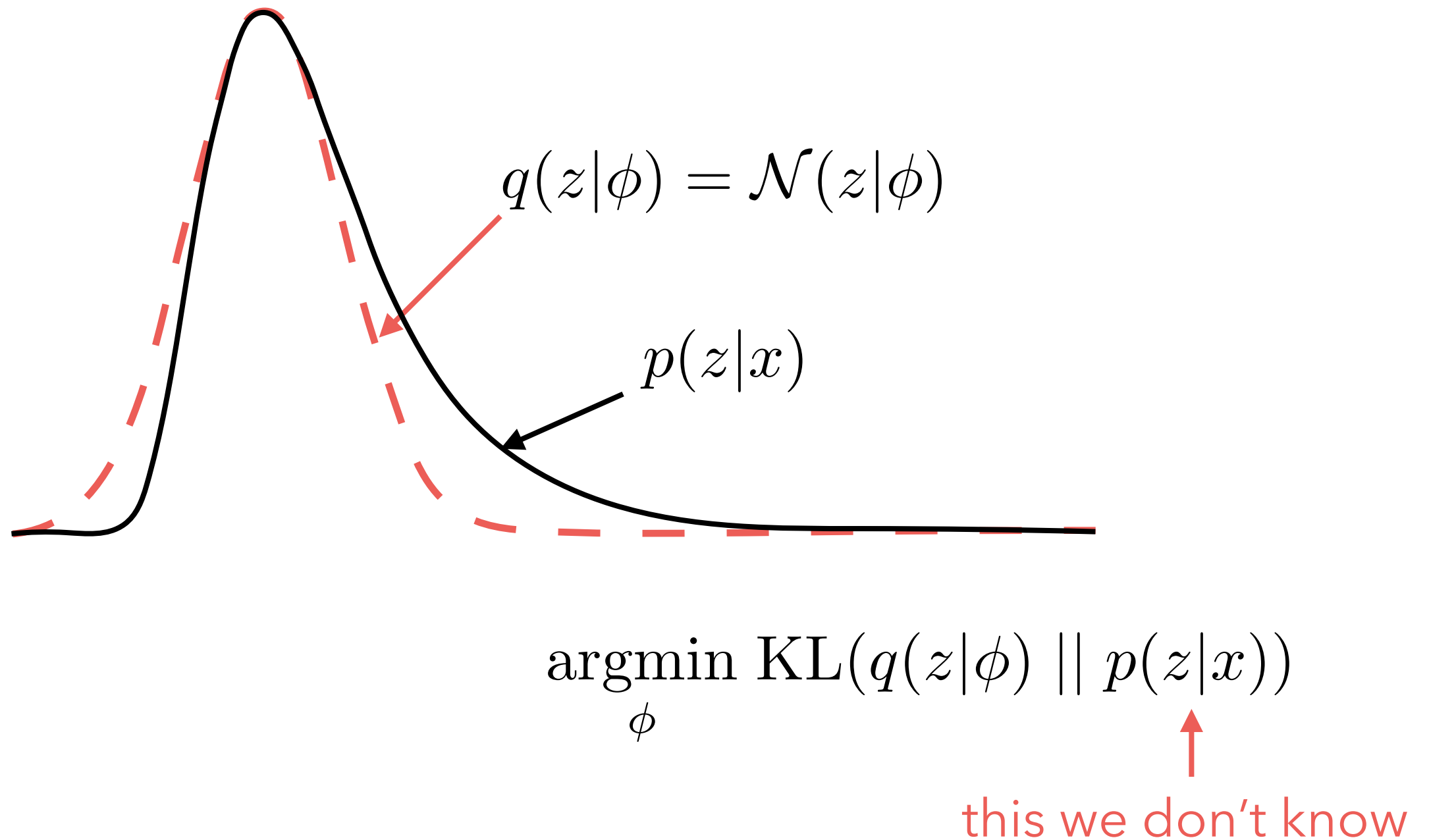
variational bayes



variational bayes



variational bayes



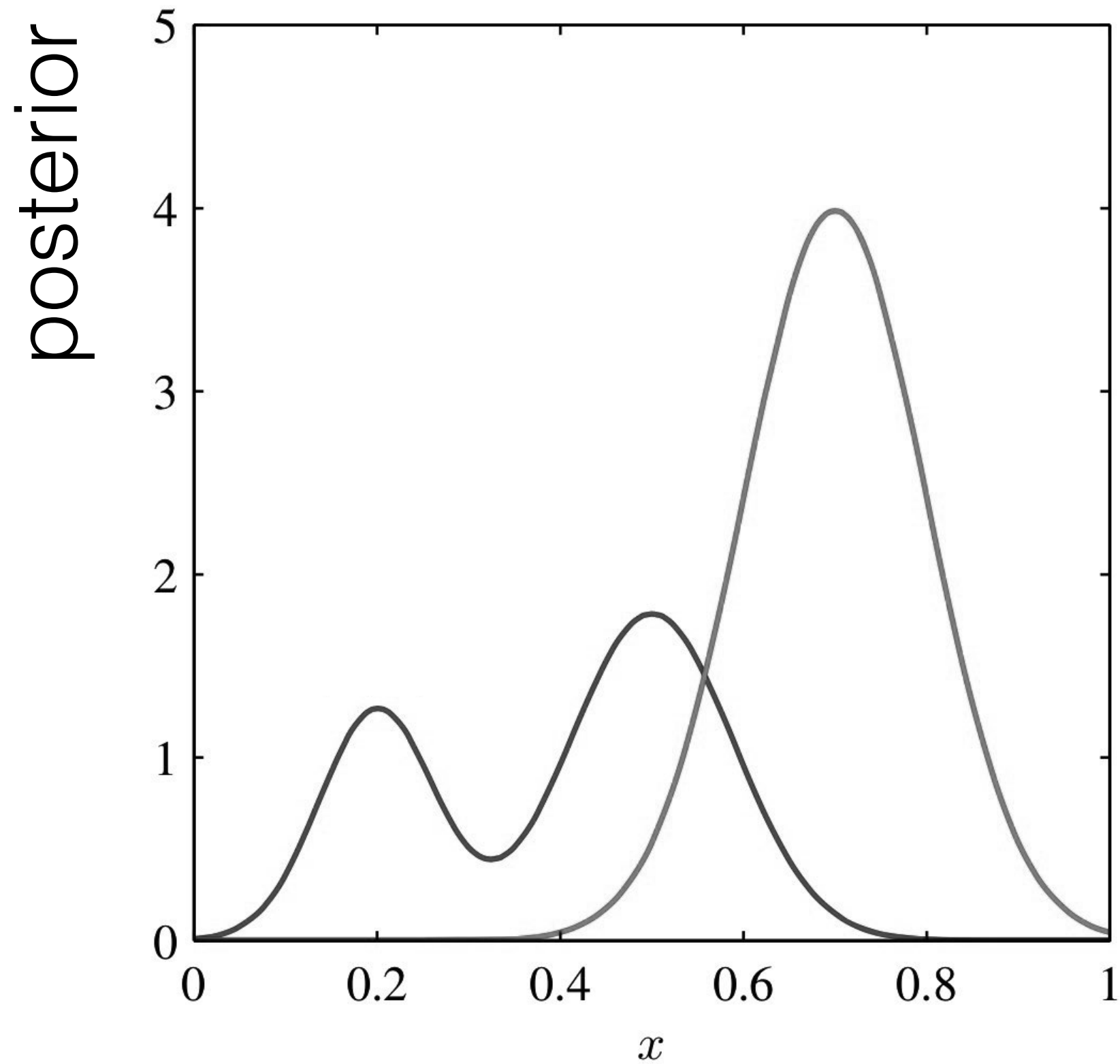
pontbecslések

eloszlás

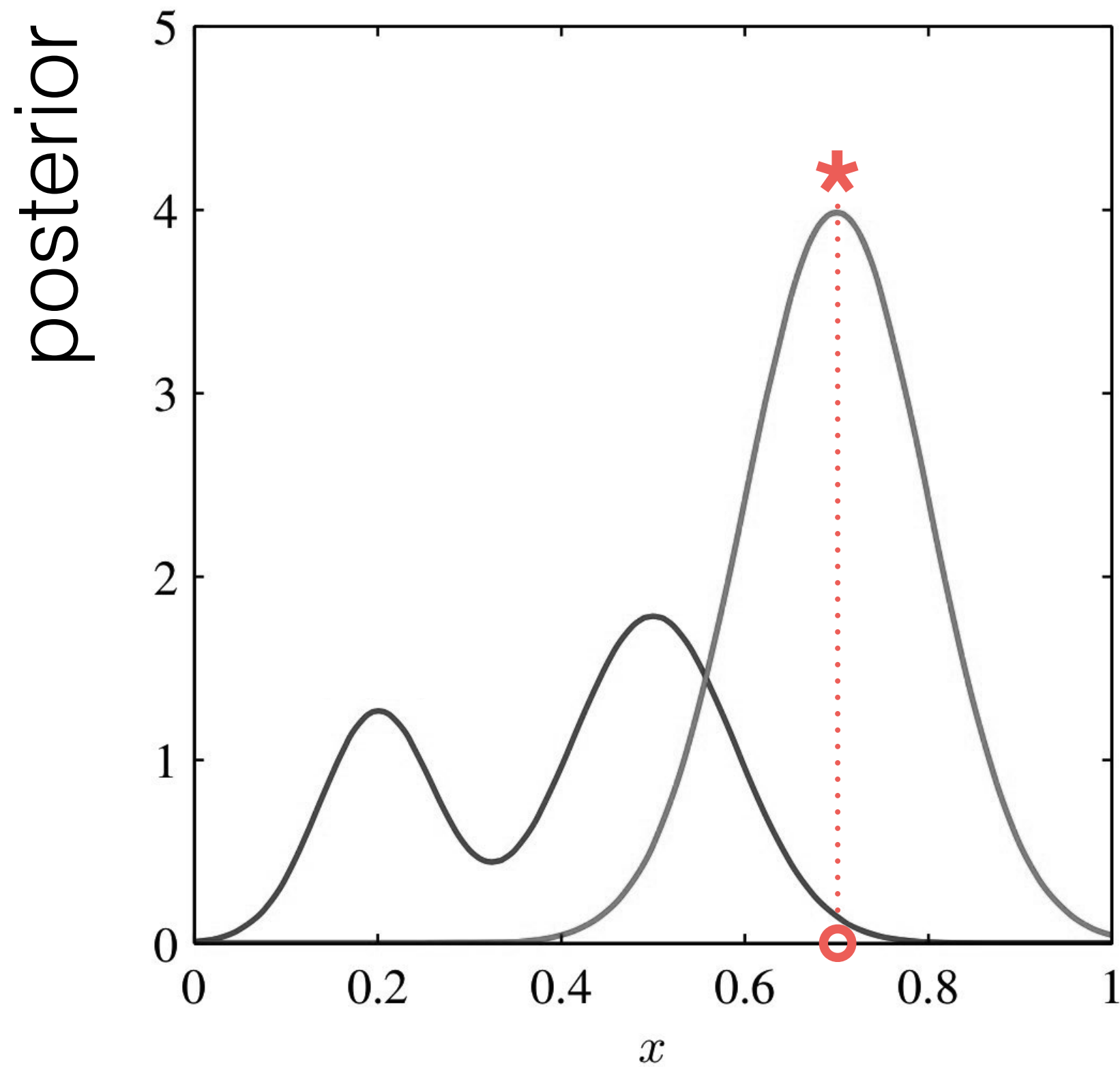


egy szám

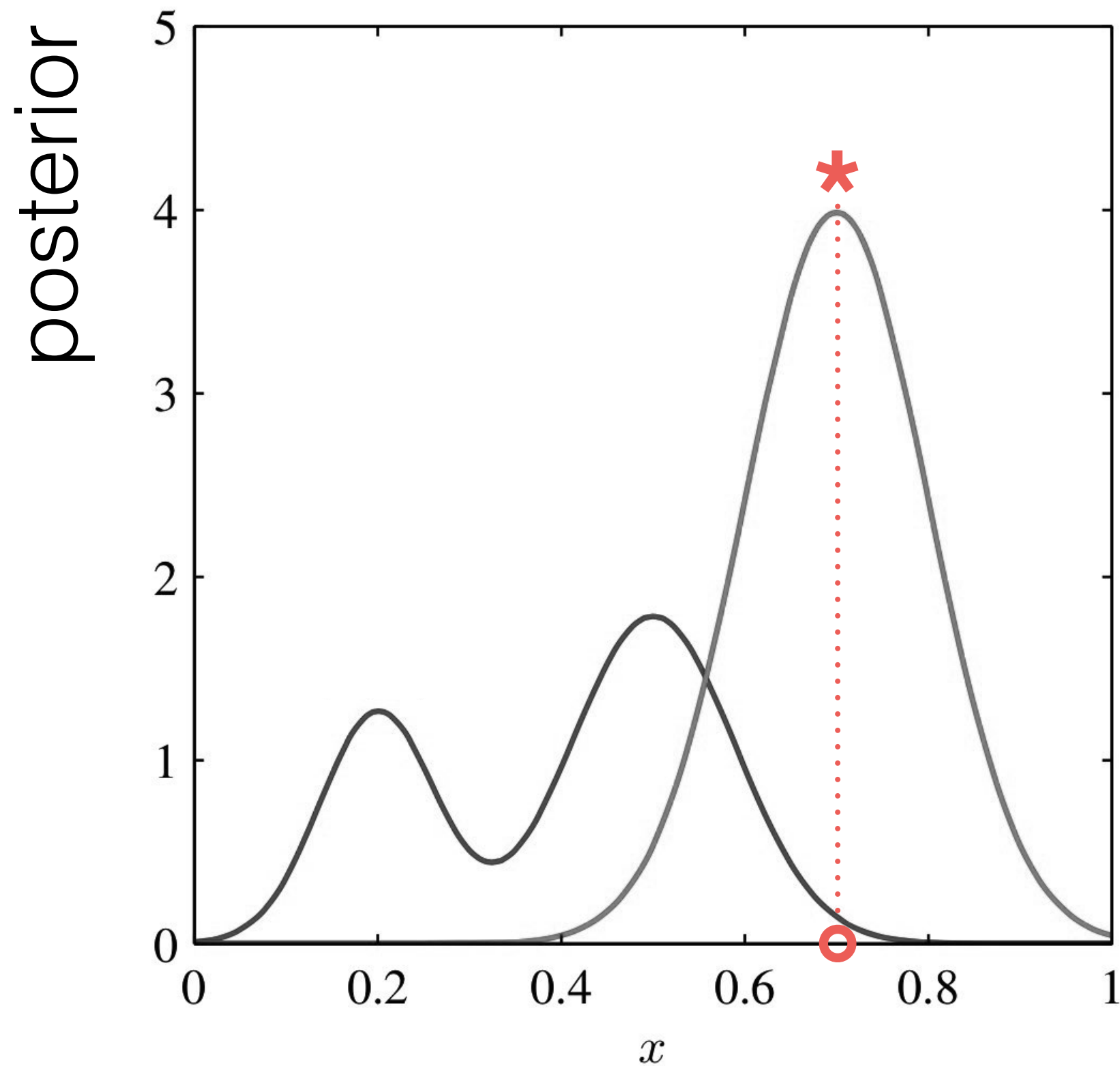
MAP becslés



MAP becslés

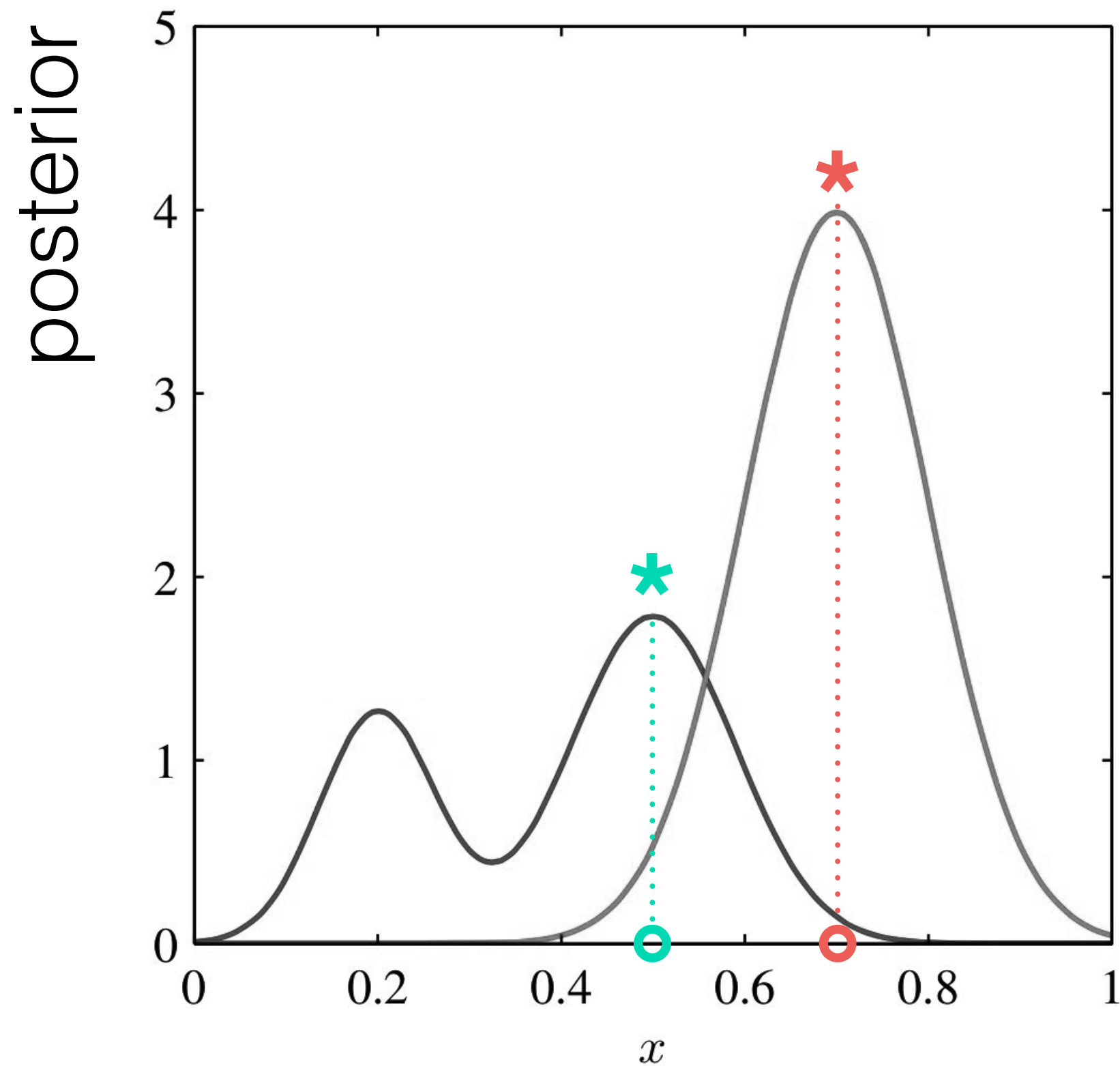


MAP becslés



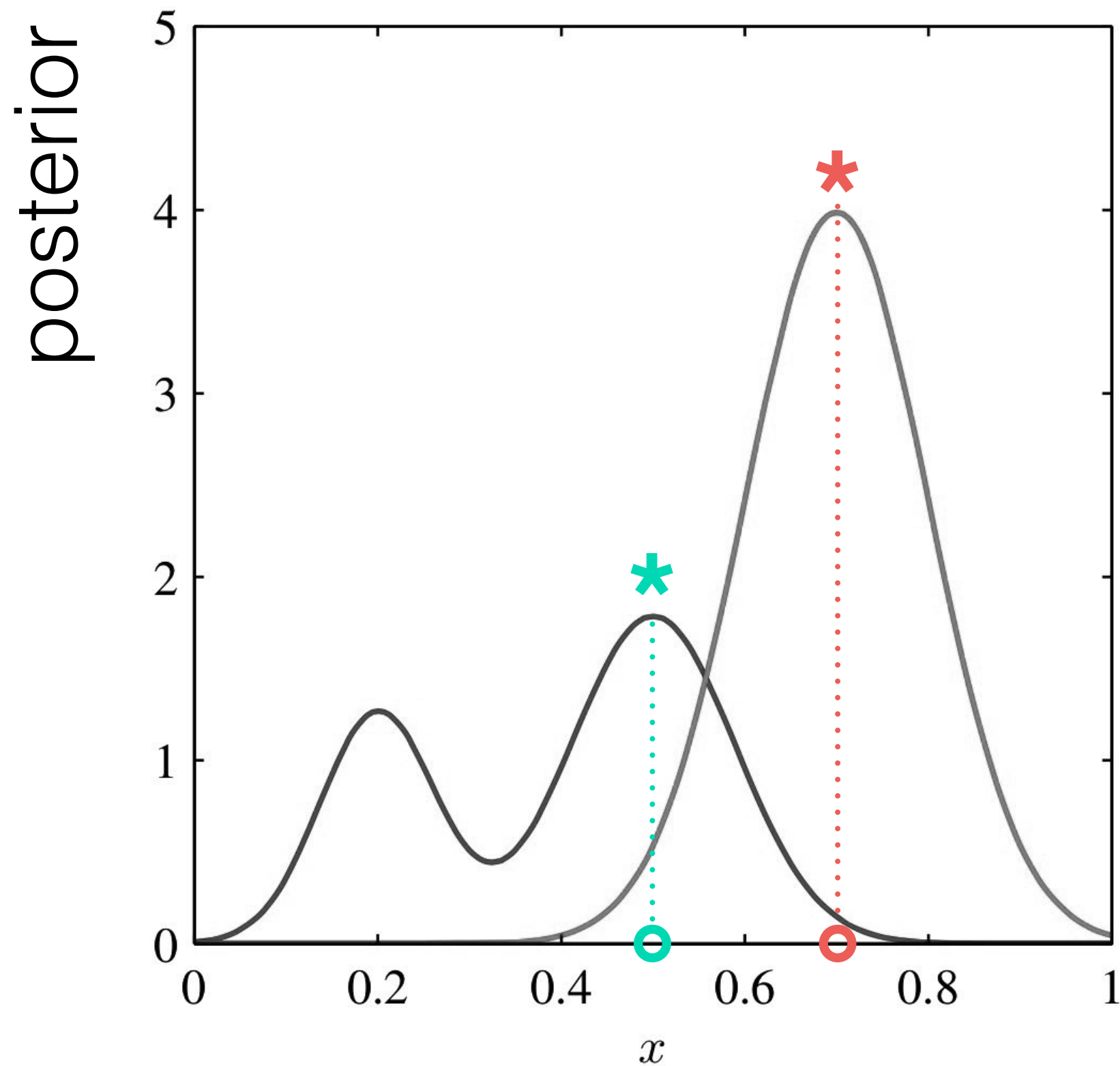
0.7

MAP becslés



0.7

MAP becslés

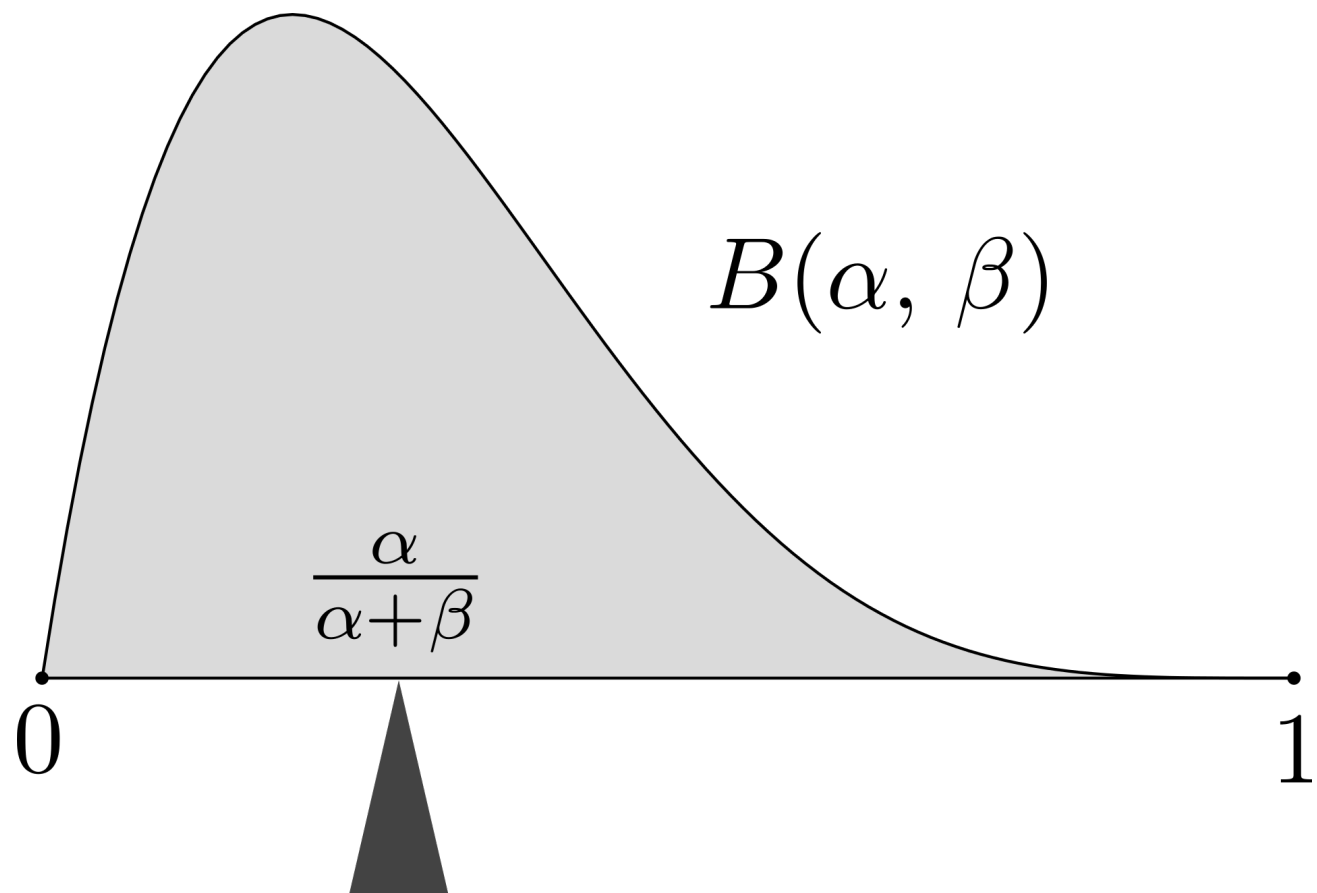


0.7

0.5

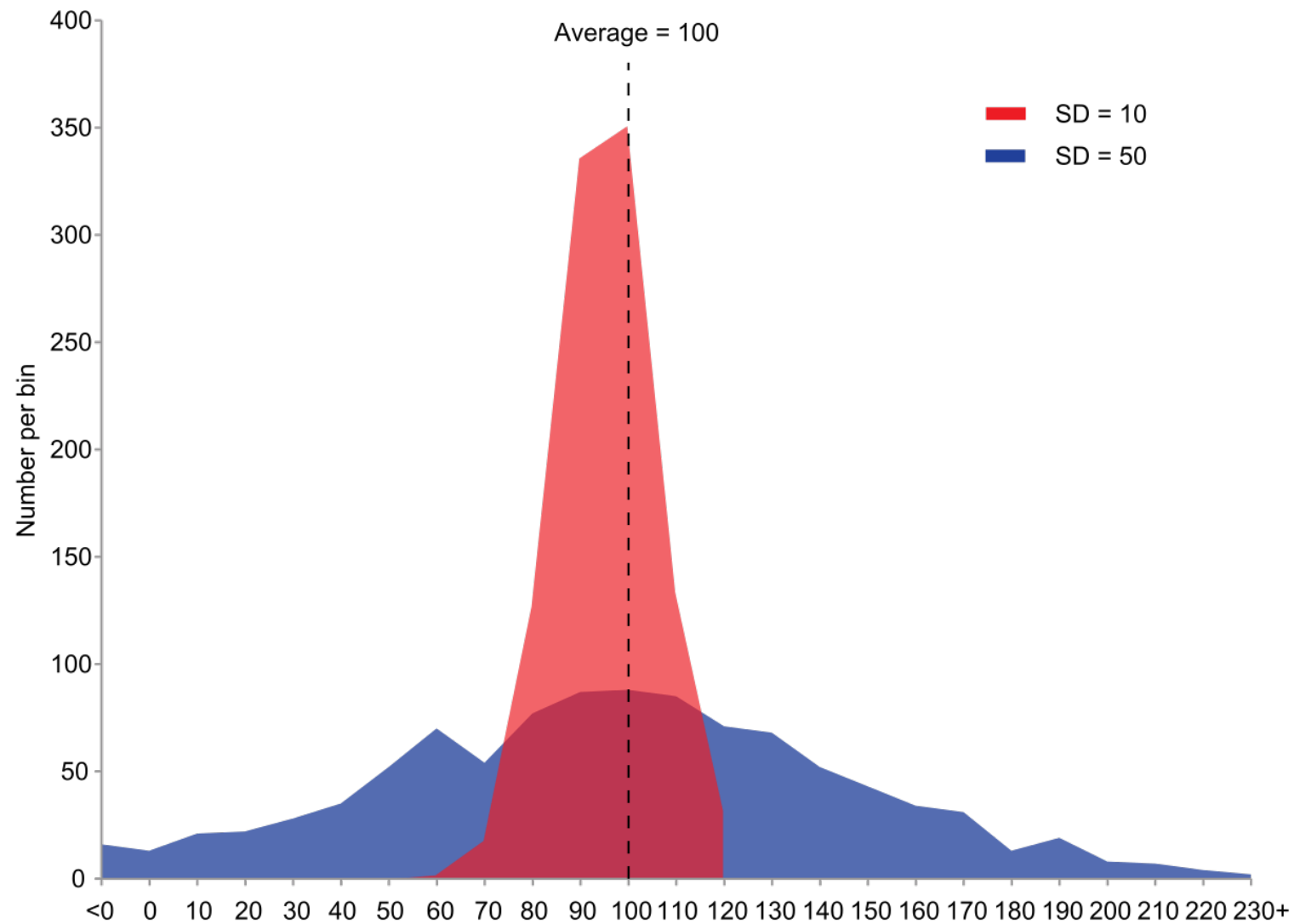
várható érték

$$E[X] = \int_{\mathbb{X}} x \, p(x) \, dx$$



variância

$$\text{Var}[X] = E[(X - E[X])^2]$$

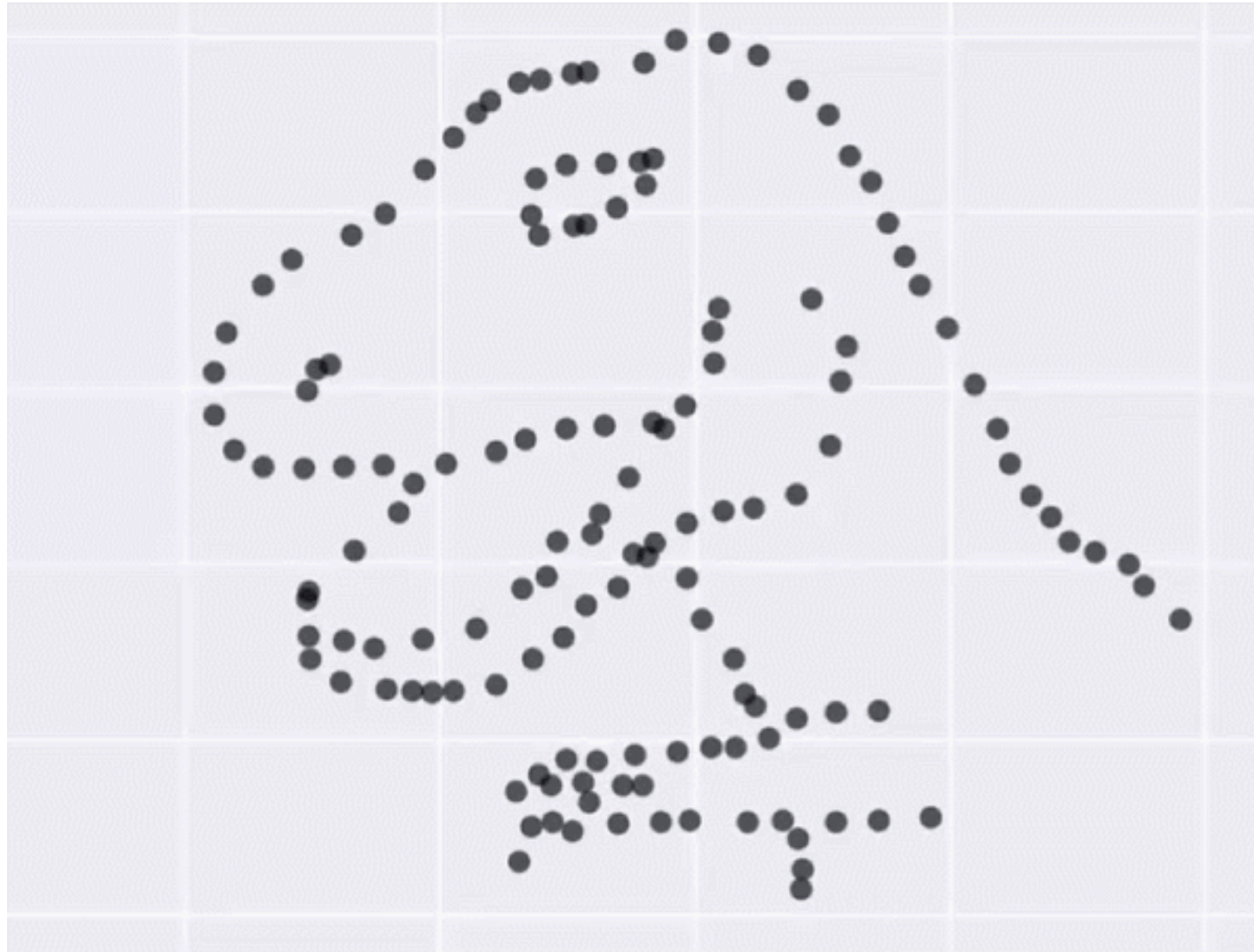


korreláció

$$Cov[X, Y] = E[(X - E[X])(Y - E[Y])]$$

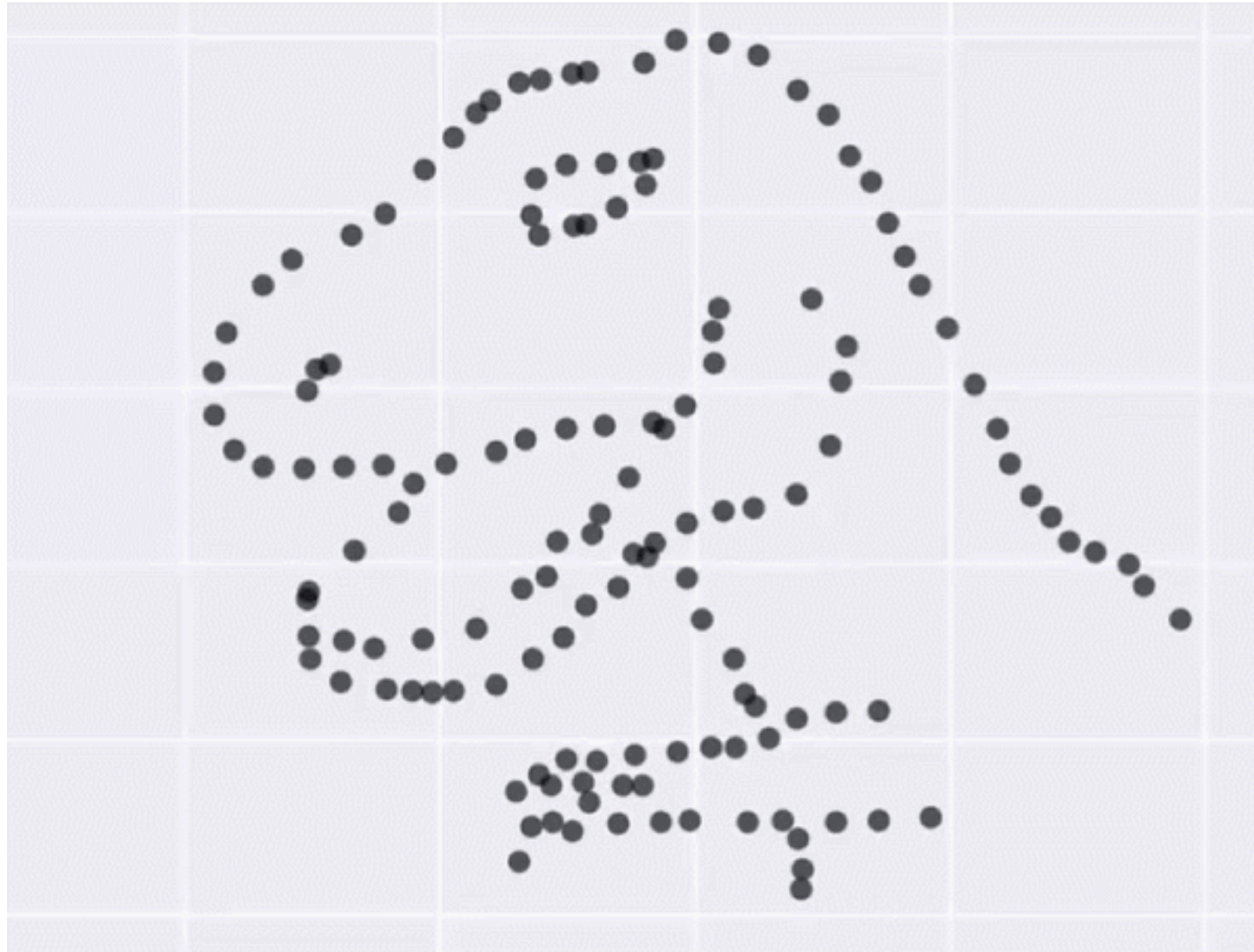
$$Corr[X, Y] = \frac{Cov[X, Y]}{\sqrt{Var[X] Var[Y]}}$$

pontbecslések



X Mean:	54.26
Y Mean:	47.83
X SD :	16.76
Y SD :	26.93
Corr. :	-0.06

pontbecslések



X Mean:	54.26
Y Mean:	47.83
X SD :	16.76
Y SD :	26.93
Corr. :	-0.06

kulcsfogalmak

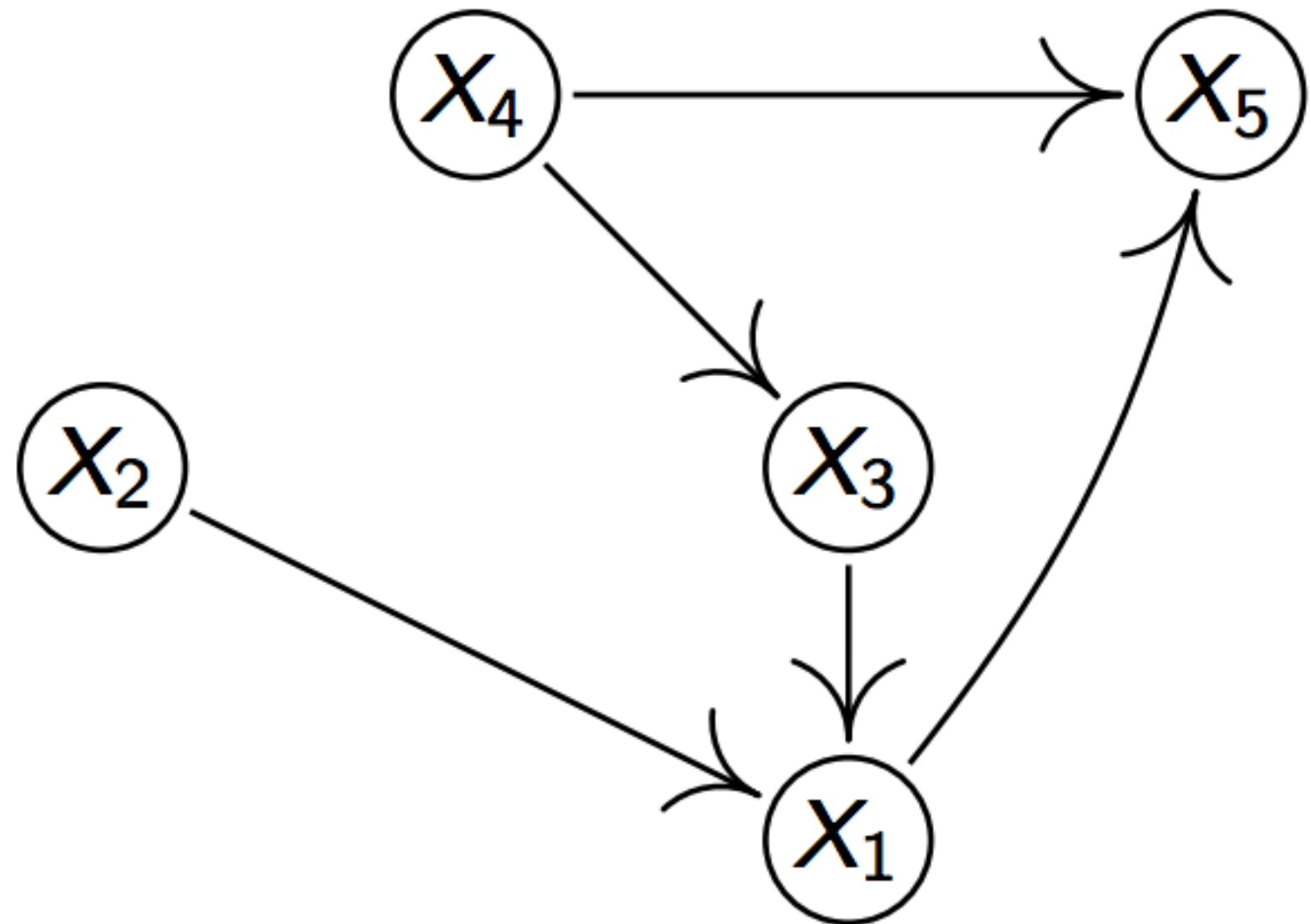
- valószínűségi kalkulus
 - eloszlásfüggvény, marginális eloszlás, feltételes eloszlás
- függetlenség, feltételes függetlenség
- irányított grafikus modell
- mintavételezés (sampling)
- Bayes-i inferencia
 - prior, posterior, likelihood

1. házi feladat

Készíts generatív valószínűségi modellt, ami autógyártók éves bevételének jóslására használható (más témát is választhatsz).

- válaszd ki a fontos változókat
- a változók közötti függetlenségi viszonyok alapján rajzolj grafikus modellt
- válassz diszkrét vagy folytonos eloszlásokat a szükséges marginálisok és kondicionálisok formájául (https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_probability_distributions)
- gondolkodj el rajta, hogy mik azok a feltételezések, amiket beleépítettél a modellbe, de sejtetően nem egyeznek a valósággal

2. házi feladat



- x_2 és x_5 között terjedhet hatás?
- hogyan lehetne x_1 és x_4 -et függetlenné tenni?

referenciák

[Kulkarni et al 2014]

Kulkarni, Tejas D., et al. "Inverse graphics with probabilistic CAD models." arXiv preprint arXiv:1407.1339 (2014).

[Hurley et al 2011]

Hurley, Matthew M., Daniel Clement Dennett, and Reginald B. Adams. Inside jokes: Using humor to reverse-engineer the mind. MIT press, 2011.

McGurk effect (video)

<https://www.youtube.com/watch?v=G-IN8vWm3m0>