

Statisztikai tanulás az idegrendszerben

Bayes-i viselkedés

Orbán Gergő
golab.wigner.mta.hu

Introduction

Knowledge representation

Probabilistic models

Bayesian behaviour

Approximate inference I (computer lab)

Vision I

Approximate inference II: Sampling

Measuring priors

Neural representation of probabilities

Structure learning

Vision II

Decision making and reinforcement learning

elméleti

Introduction

Knowledge representation

Probabilistic models

Bayesian behaviour

Approximate inference I (computer lab)

Vision I

Approximate inference II: Sampling

Measuring priors

Neural representation of probabilities

Structure learning

Vision II

Decision making and reinforcement learning

Introduction

Knowledge representation

Probabilistic models

elméleti

Bayesian behaviour

Approximate inference I (computer lab)

Vision I

kognitív

Approximate inference II: Sampling

Measuring priors

Neural representation of probabilities

Structure learning

Vision II

Decision making and reinforcement learning

Introduction

Knowledge representation

Probabilistic models

elméleti

Bayesian behaviour

Approximate inference I (computer lab)

Vision I

kognitív

Approximate inference II: Sampling

Measuring priors

Neural representation of probabilities

neurális

Structure learning

Vision II

Decision making and reinforcement learning

RECAP

**DEDUKTÍV KÖVETKEZTETÉSEK
VS
PLAUZIBILIS KÖVETKEZTETÉSEK**

DEDUKTÍV KÖVETKEZTETÉSEK
VS
PLAUZIBILIS KÖVETKEZTETÉSEK



VALÓSZÍNŰSÉGELMÉLET
(A VILÁG MODELLJE:
VALÓSZÍNŰSÉGEK A LEHETSÉGES ÁLLAPOTOKHOZ)

DEDUKTÍV KÖVETKEZTETÉSEK
VS
PLAUZIBILIS KÖVETKEZTETÉSEK



VALÓSZÍNŰSÉGELMÉLET
(A VILÁG MODELLJE:
VALÓSZÍNŰSÉGEK A LEHETSÉGES ÁLLAPOTOKHOZ)



ALAP MŰVELETEK VALÓSZÍNŰSÉGI MODELLBEN
ÖSSZEG SZABÁLY (MARGINALIZÁLÁS) &
SZORZAT SZABÁLY (LÁNCSZABÁLY)

DEDUKTÍV KÖVETKEZTETÉSEK
VS
PLAUZIBILIS KÖVETKEZTETÉSEK



VALÓSZÍNŰSÉGELMÉLET
(A VILÁG MODELLJE:
VALÓSZÍNŰSÉGEK A LEHETSÉGES ÁLLAPOTOKHOZ)



JOB B KIFEJEZŐEREJŰ FORMALIZMUS
GRAFIKUS MODELLEK
(JOINT FELSZABDALÁSA, FELTÉTELES FLENSÉG)



ALAP MŰVELETEK VALÓSZÍNŰSÉGI MODELLBEN
ÖSSZEG SZABÁLY (MARGINALIZÁLÁS) &
SZORZAT SZABÁLY (LÁNCSZABÁLY)

DEDUKTÍV KÖVETKEZTETÉSEK
VS
PLAUZIBILIS KÖVETKEZTETÉSEK



VALÓSZÍNŰSÉGELMÉLET
(A VILÁG MODELLJE:
VALÓSZÍNŰSÉGEK A LEHETSÉGES ÁLLAPOTOKHOZ)



JOB B KIFEJEZŐEREJŰ FORMALIZMUS
GRAFIKUS MODELLEK
(JOINT FELSZABDALÁSA, FELTÉTELES FLENSÉG)



ALAP MŰVELETEK VALÓSZÍNŰSÉGI MODELLBEN
ÖSSZEG SZABÁLY (MARGINALIZÁLÁS) &
SZORZAT SZABÁLY (LÁNCSZABÁLY)

PERCEPCIÓ MINT INFERENCIA
>> KÖRNYEZET ÁLLAPOTA — KÖVETKEZTETÉSEK
>> MEGFIGYELÉSEK NEM EGYÉRTELMŰEK

DEDUKTÍV KÖVETKEZTETÉSEK
VS
PLAUZIBILIS KÖVETKEZTETÉSEK



VALÓSZÍNŰSÉGELMÉLET
(A VILÁG MODELLJE:
VALÓSZÍNŰSÉGEK A LEHETSÉGES ÁLLAPOTOKHOZ)



ALAP MŰVELETEK VALÓSZÍNŰSÉGI MODELLBEN
ÖSSZEG SZABÁLY (MARGINALIZÁLÁS) &
SZORZAT SZABÁLY (LÁNCSZABÁLY)

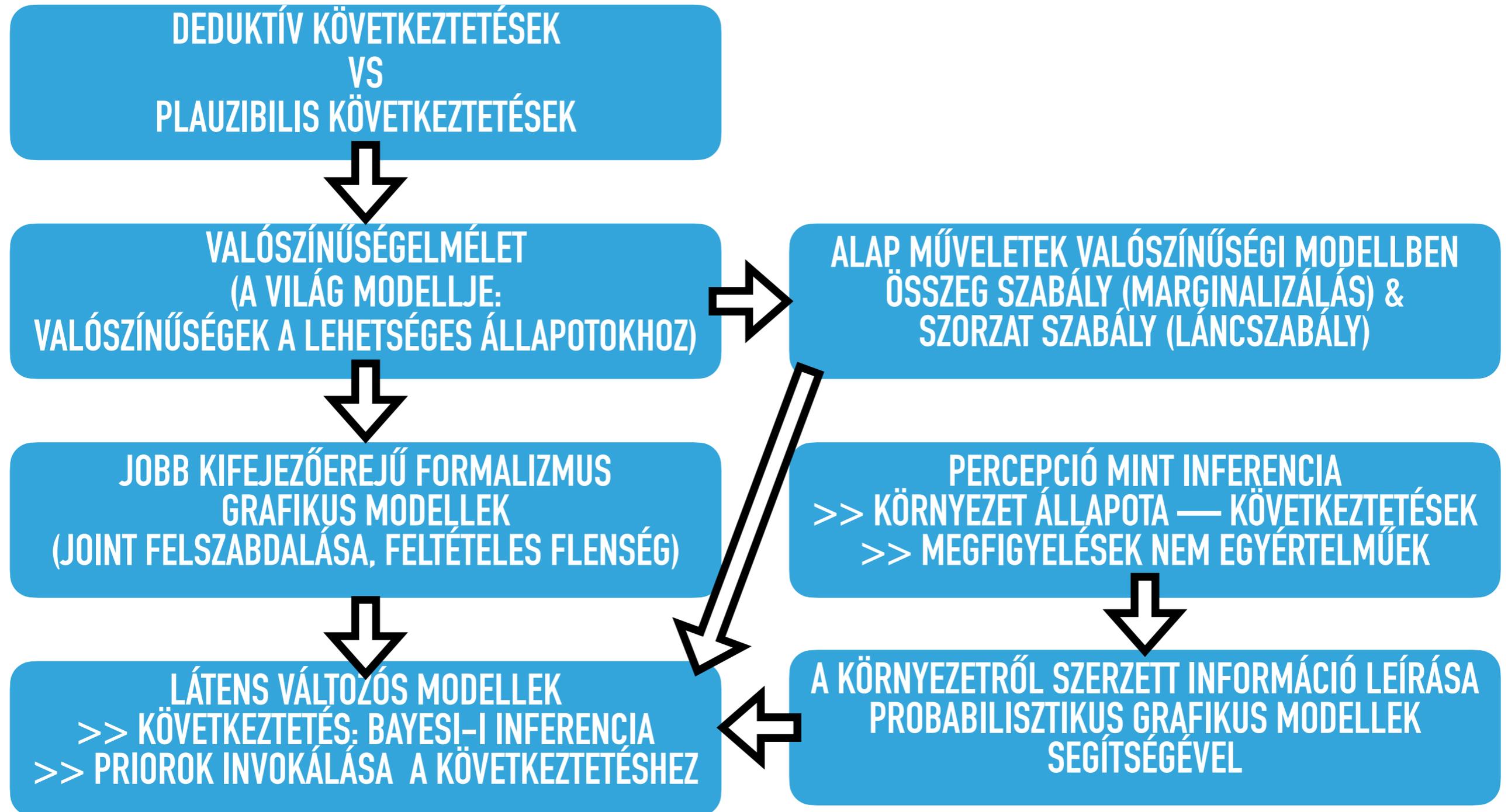


JOB B KIFEJEZŐEREJŰ FORMALIZMUS
GRAFIKUS MODELLEK
(JOINT FELSZABDALÁSA, FELTÉTELES FLENSÉG)

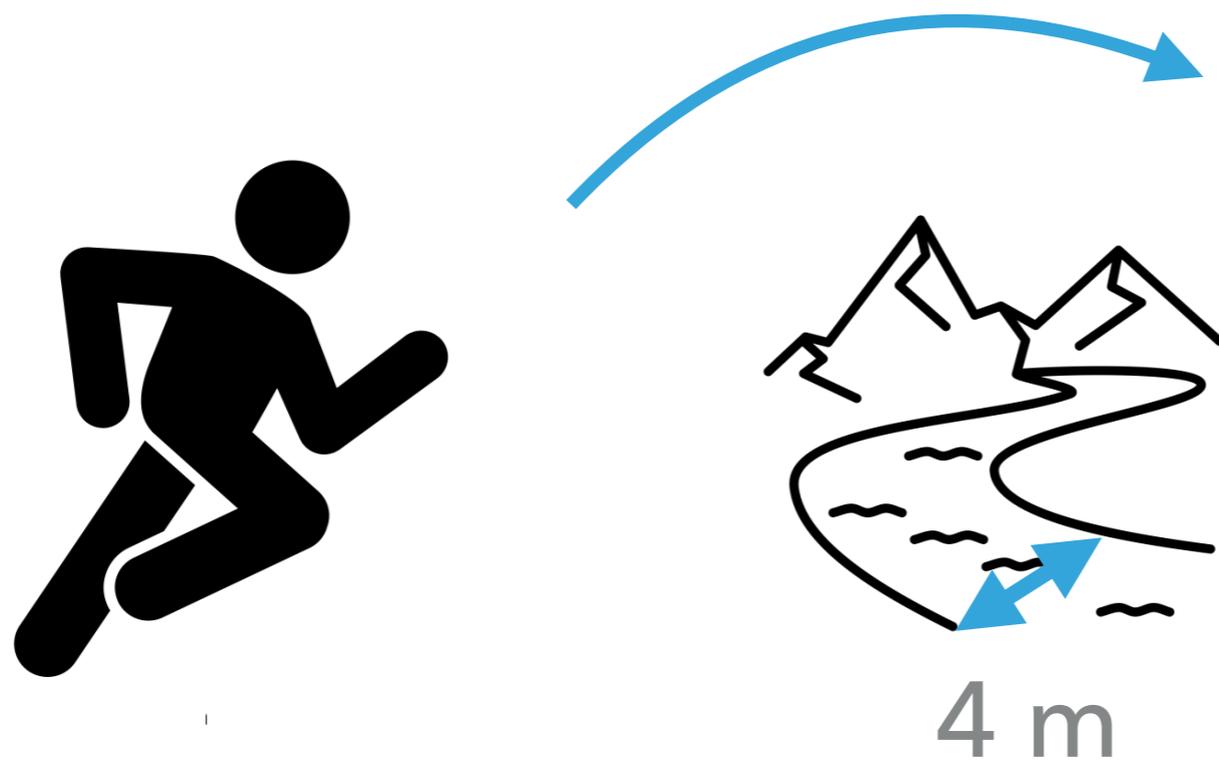
PERCEPCIÓ MINT INFERENCIA
>> KÖRNYEZET ÁLLAPOTA — KÖVETKEZTETÉSEK
>> MEGFIGYELÉSEK NEM EGYÉRTELMŰEK



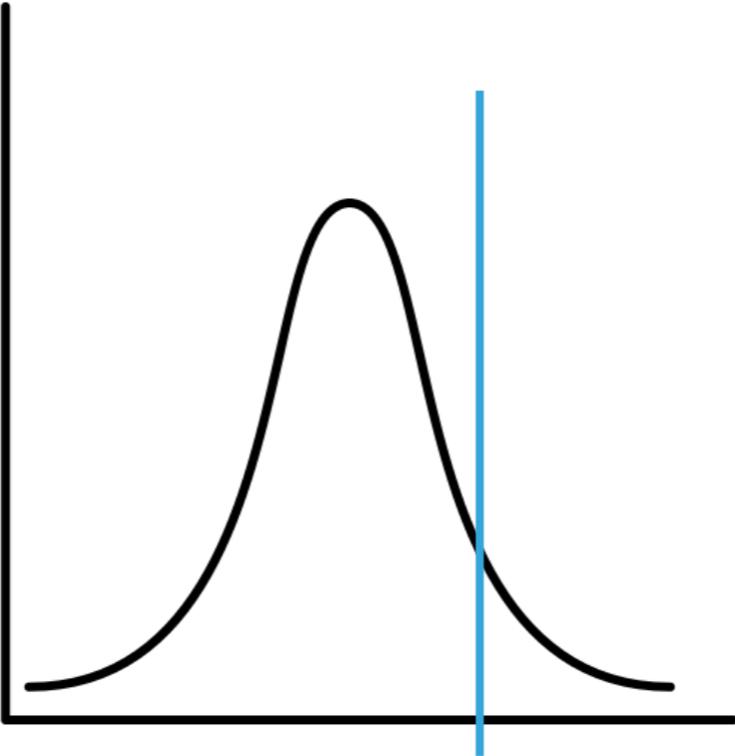
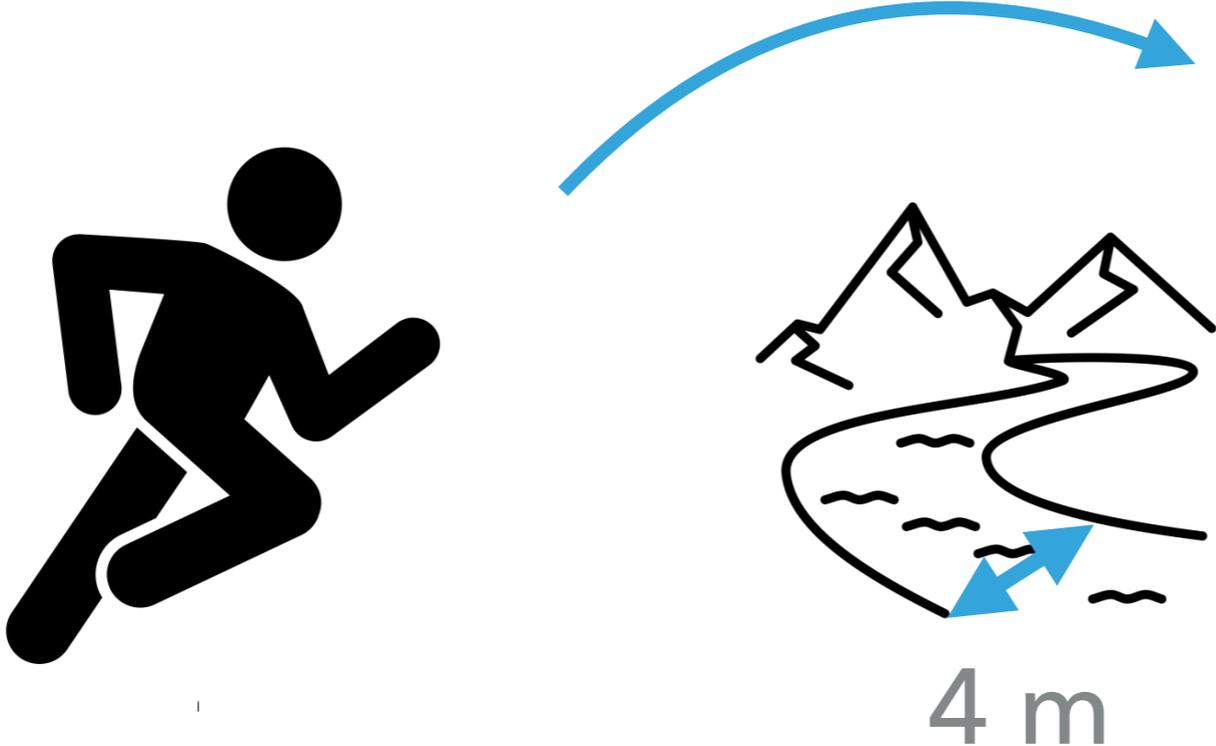
A KÖRNYEZETRŐL SZERZETT INFORMÁCIÓ LEÍRÁSA
PROBABILISZTIKUS GRAFIKUS MODELLEK
SEGÍTSÉGÉVEL



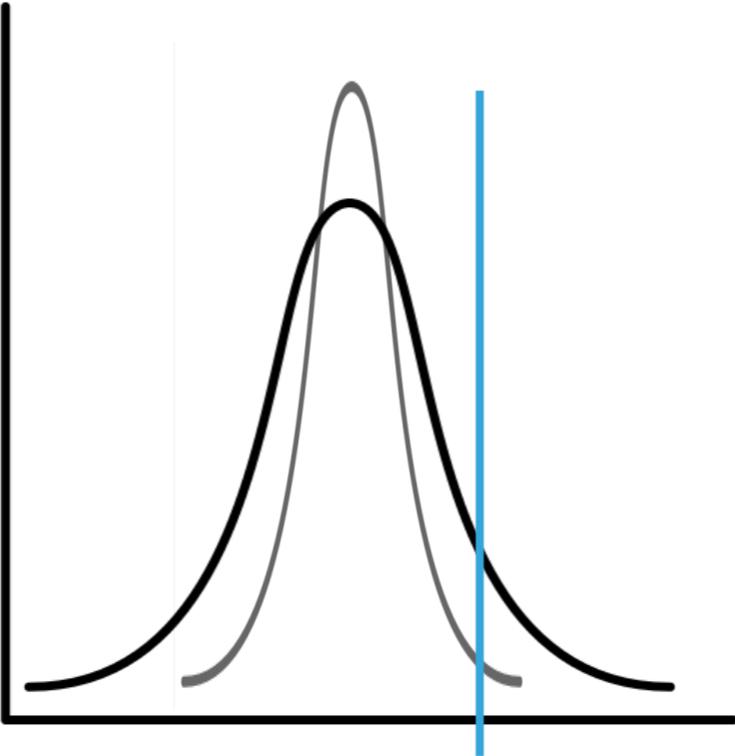
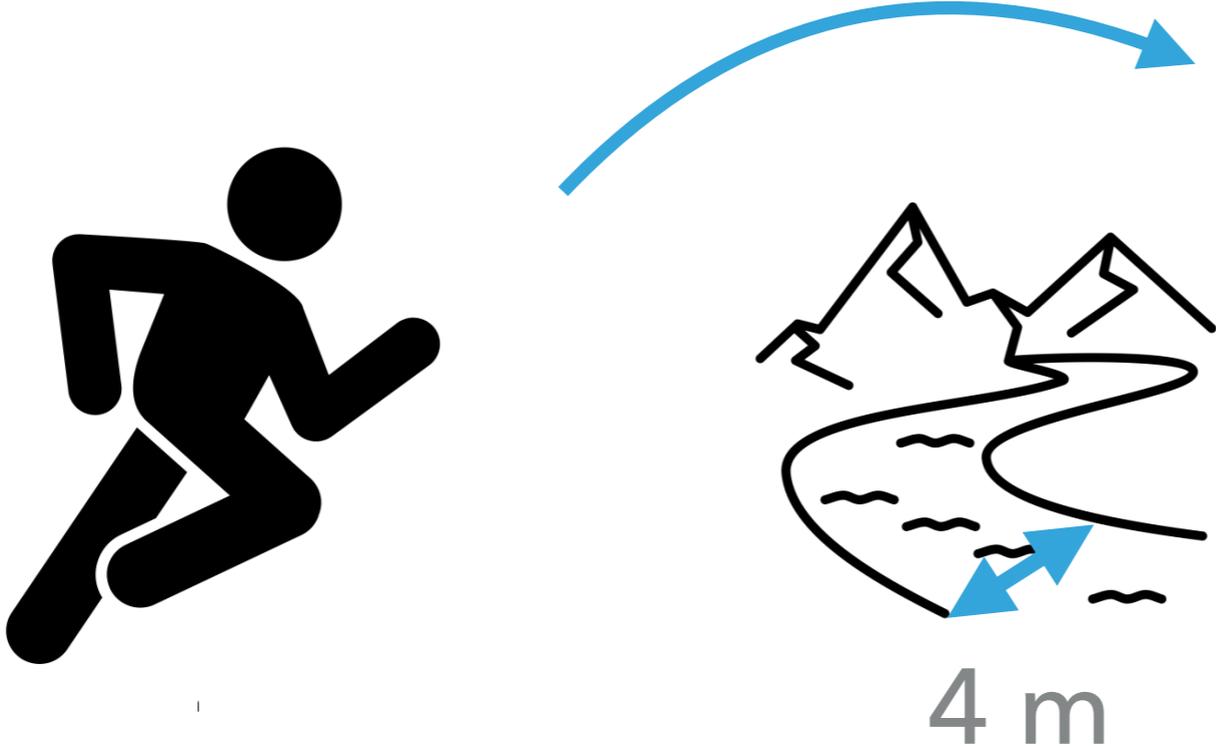
BIZONYTALANSÁGOK REPRESENTÁLÁSA



BIZONYTALANSÁGOK REPRESENTÁLÁSA



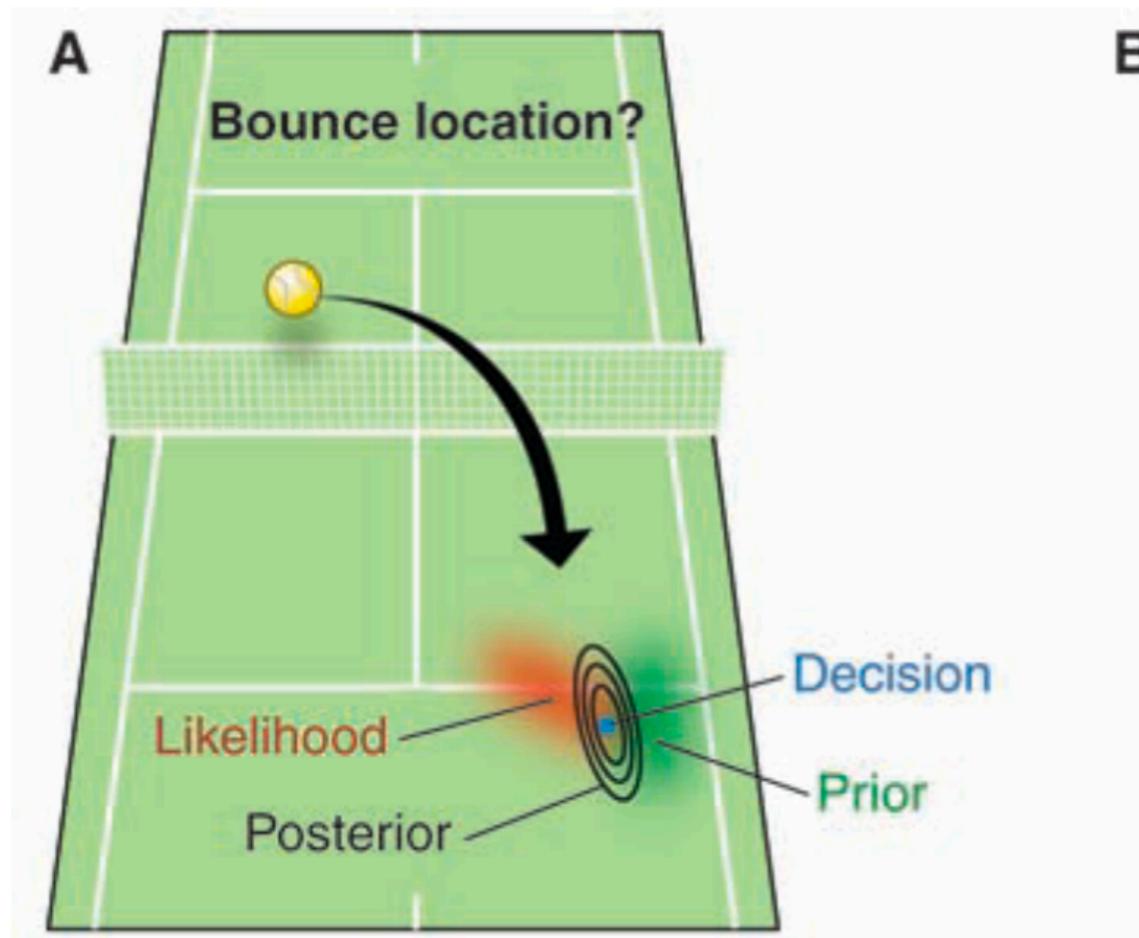
BIZONYTALANSÁGOK REPREZENTÁLÁSA



BAYES-I VISELKEDÉS

- ▶ Bizonytalanság, ambiguitás miatt normatív feltételezés, hogy a valószínűségszámításra van szükség
- ▶ Feltételezzük, hogy az emberi idegrendszer evolúciósan úgy fejlődött, hogy képes legyen a bayesi inferenciához közel egyenértékű számításokat végezni

BAYES-I VISELKEDÉS

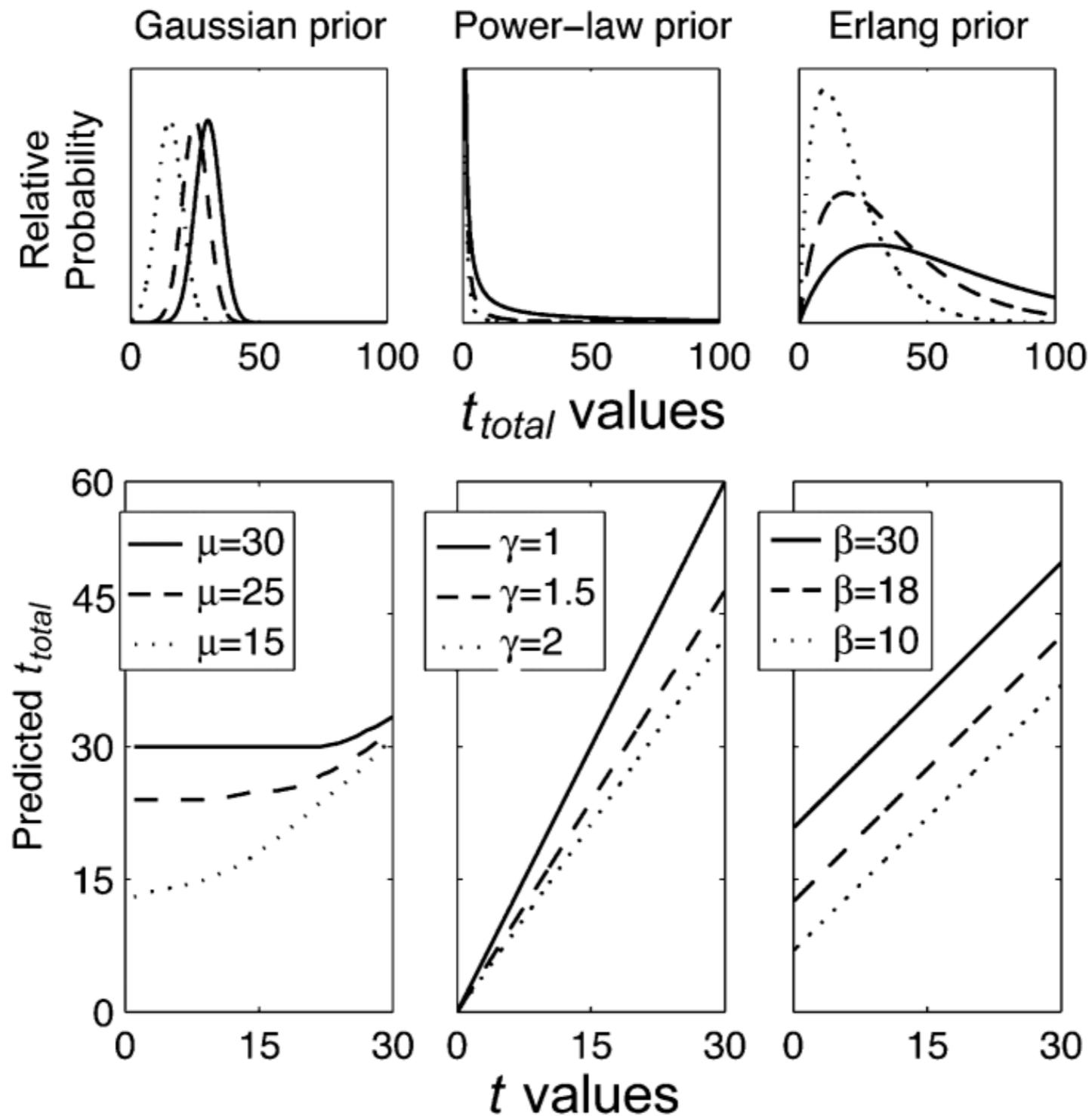


Insurance agencies employ actuaries to make predictions about people's life spans—the age at which they will die—based upon demographic information. If you were assessing an insurance case for an 18-year-old man, **what would you predict for his life span?**

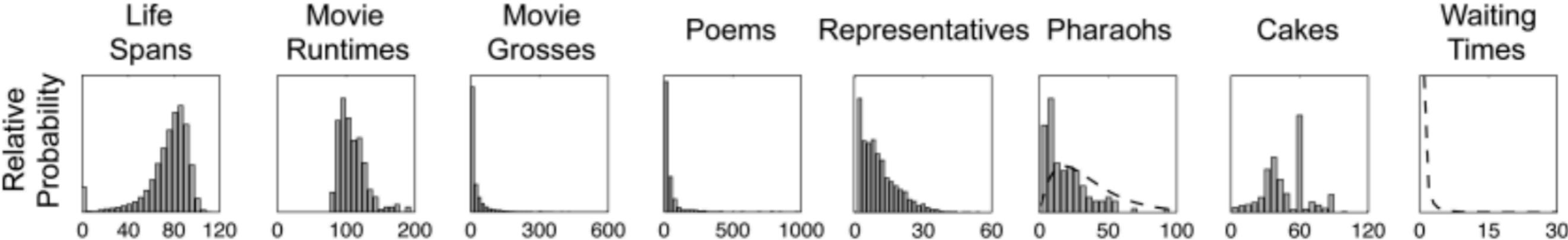
OPTIMAL PREDICTIONS IN EVERYDAY COGNITION

- ▶ **Movie grosses:** Imagine you hear about a movie that has taken in 10 million dollars at the box office, but don't know how long it has been running. What would you predict for the total amount of box office intake for that movie?
- ▶ **Waiting times:** If you were calling a telephone box office to book tickets and had been on hold for 3 minutes, what would you predict for the total time you would be on hold?
- ▶ **Lengths of marriages:** A friend is telling you about an acquaintance whom you do not know. In passing, he happens to mention that this person has been married for 23 years. How long do you think this person's marriage will last?

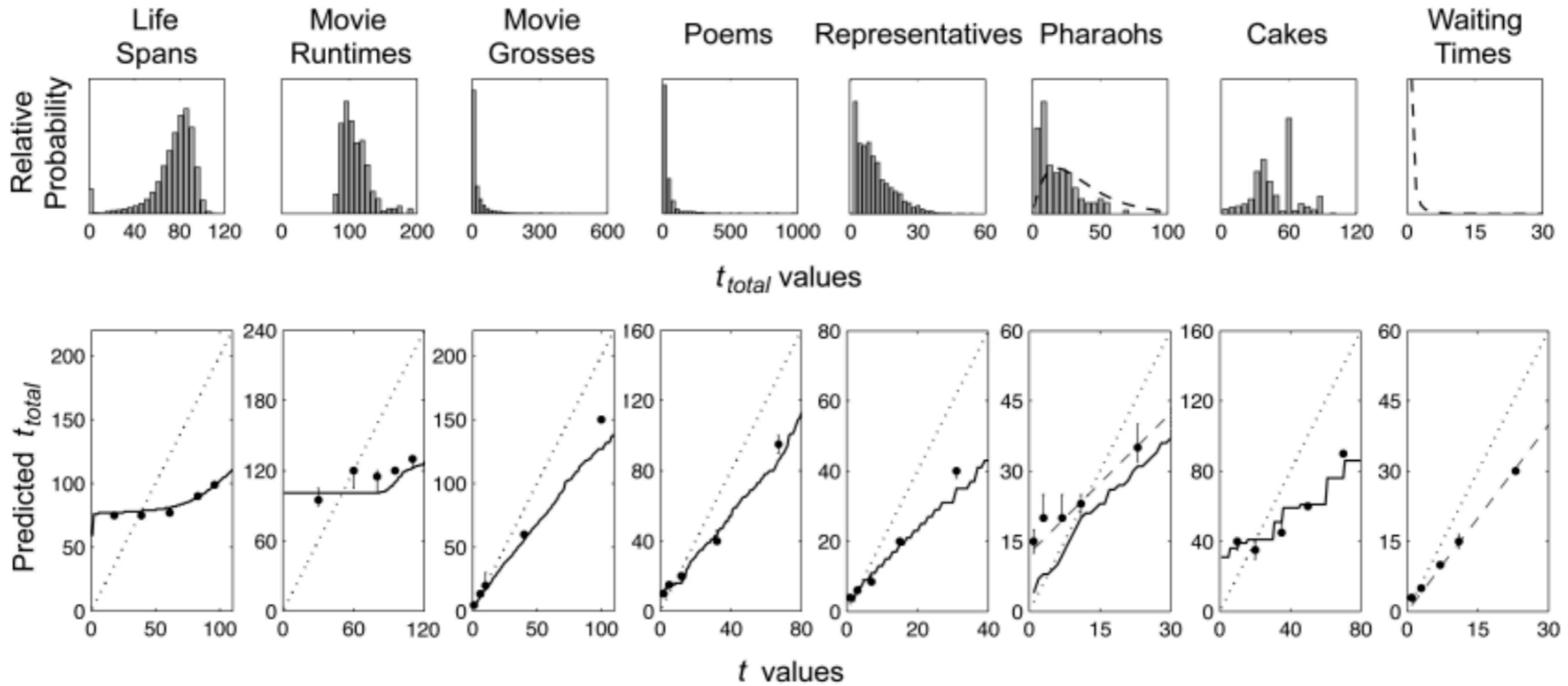
OPTIMAL PREDICTIONS IN EVERYDAY COGNITION

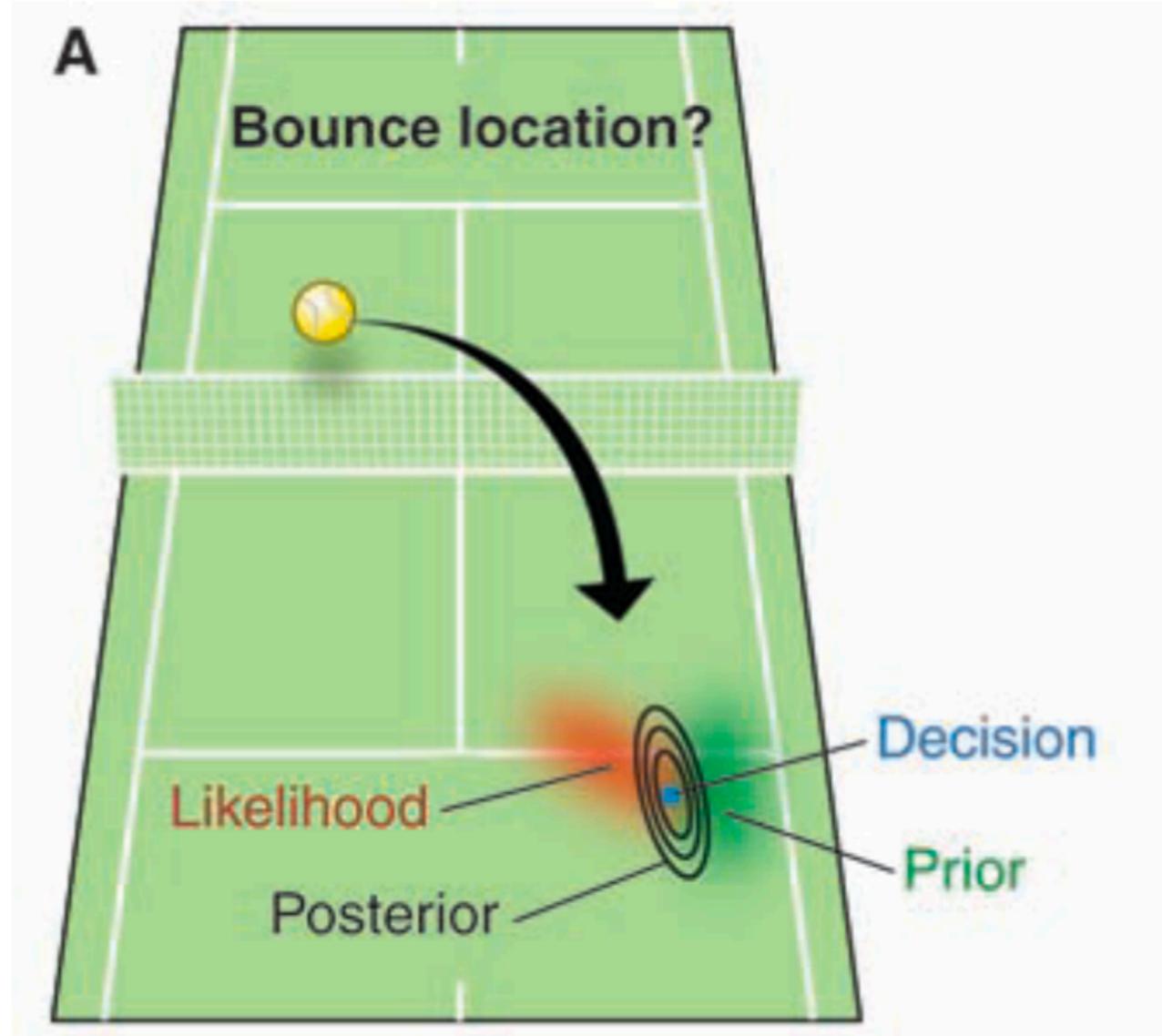


OPTIMAL PREDICTIONS IN EVERYDAY COGNITION



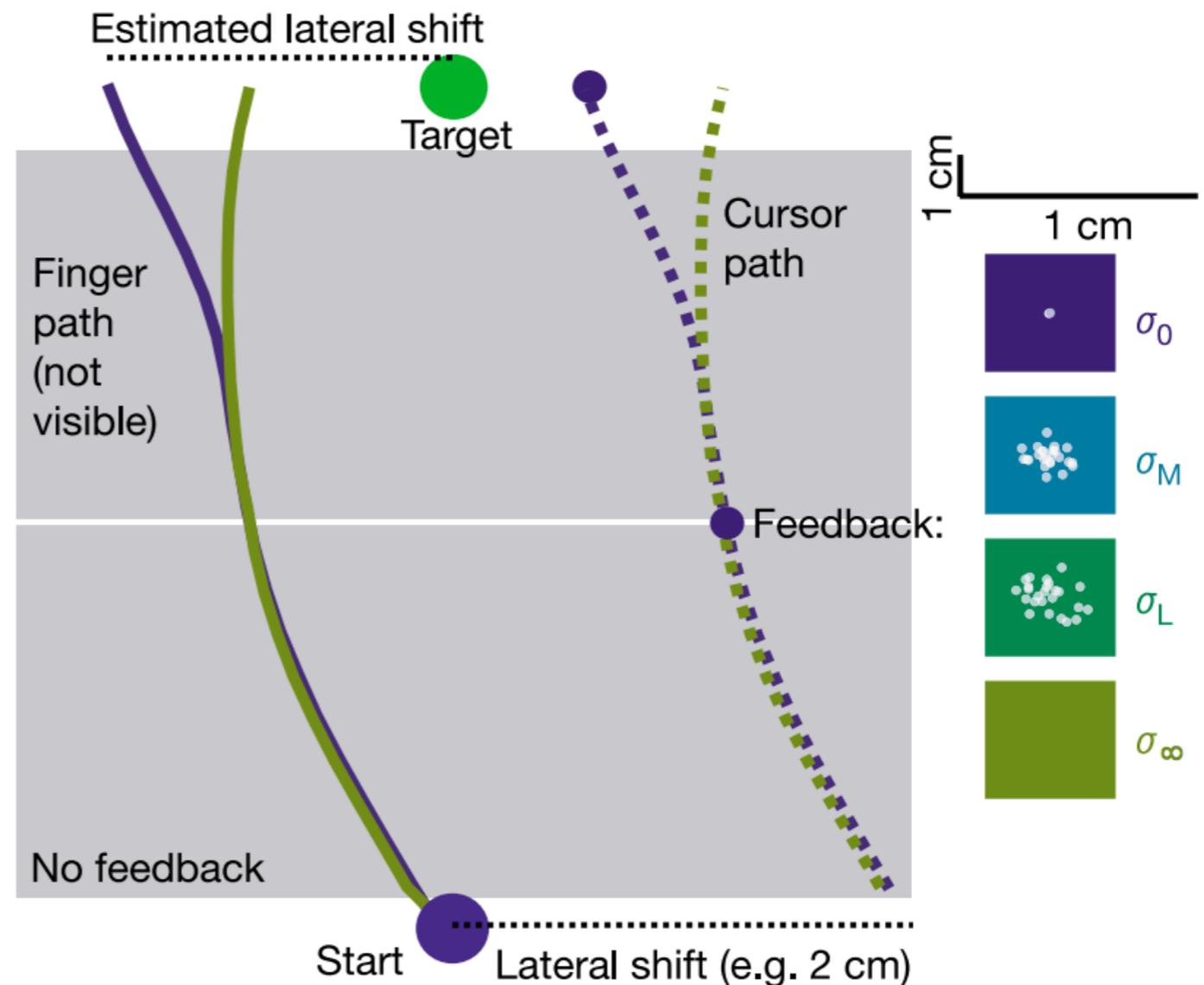
OPTIMAL PREDICTIONS IN EVERYDAY COGNITION





BAYESIAN INTEGRATION IN SENSORIMOTOR LEARNING

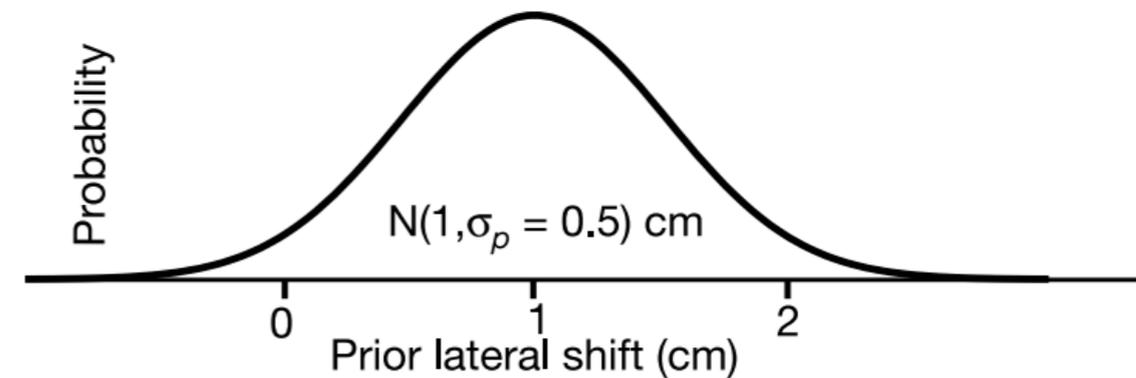
- ▶ Mutatóujj két pont közötti mozgása
- ▶ VR setup: nem valódi helyzet, ráadásul csaknéha látható
 - ▶ tréning: félúton és út végén
 - ▶ többi kondíció: csak félúton



TASK VARIABILITY

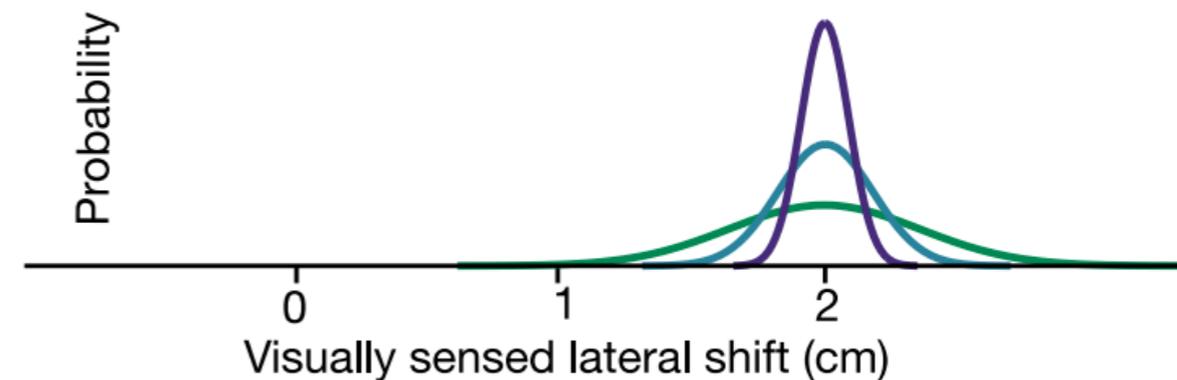
- ▶ a megjelenő kurzor eltolása a megadott priorból lett generálva véletlenszerűen
- ▶ ezt 1000 tréning próba alatt lehetett kikövetkeztetni

$$p(x) \sim \mathcal{N}(x | \mu = 1\text{cm}, \sigma_0 = 0.5\text{cm})$$



SENSORY VARIABILITY

- ▶ A különböző kondíciókban a kurzor különböző mértékben volt elmosódva:

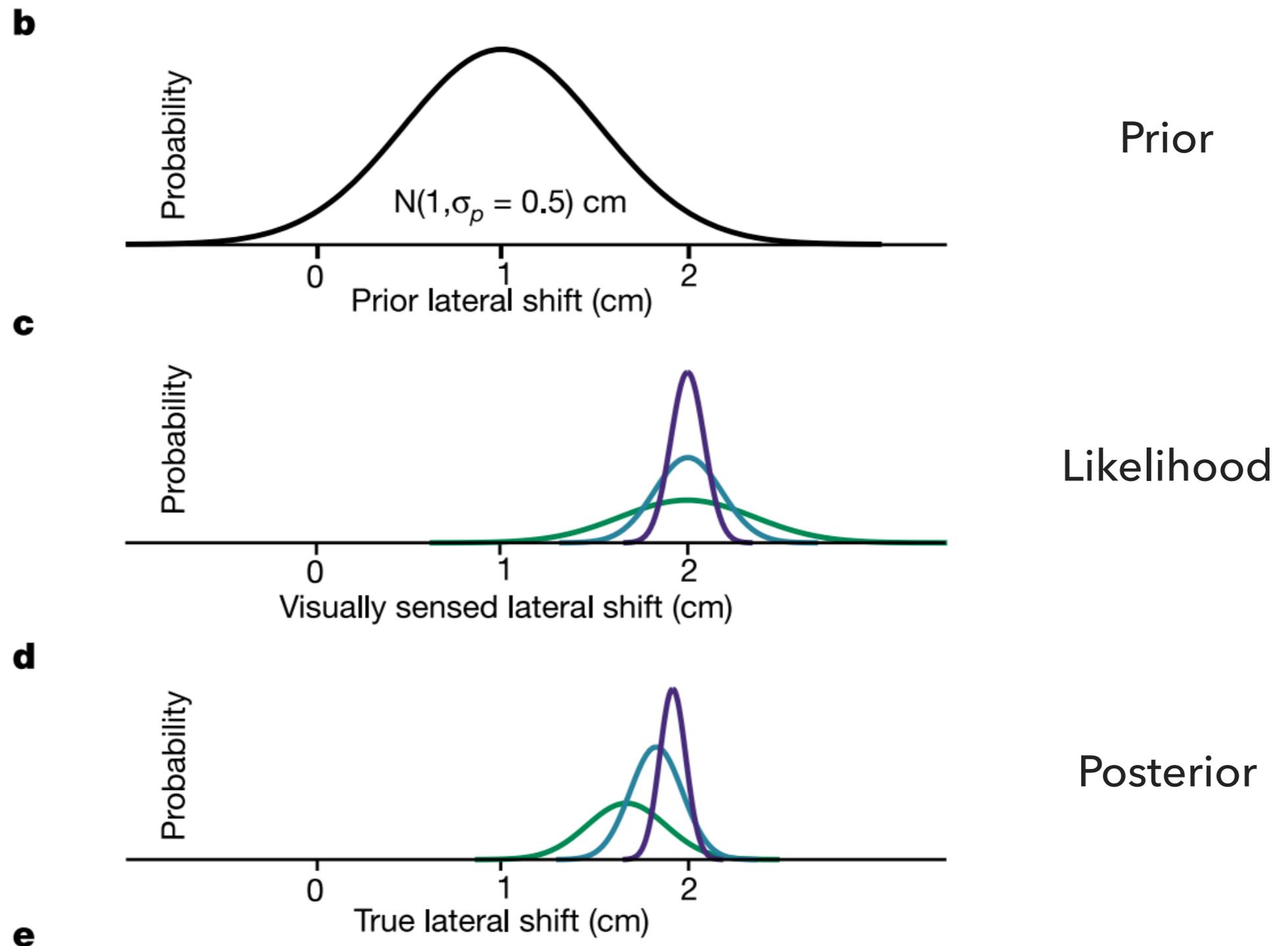


3 HIPOTÉZIS

1. Csak a vizuális becslés alapján vett kompenzáció (sem a priort, sem a szenzoros bizonytalanságot nem veszi figyelembe)
2. Mindkét bizonytalanságot figyelembe vevő optimális integráció
3. Fix leképezés a vizuális megfigyelés és az eltolás között (figyelembe veheti a priort, de a szenzoros bizonytalanságot nem)

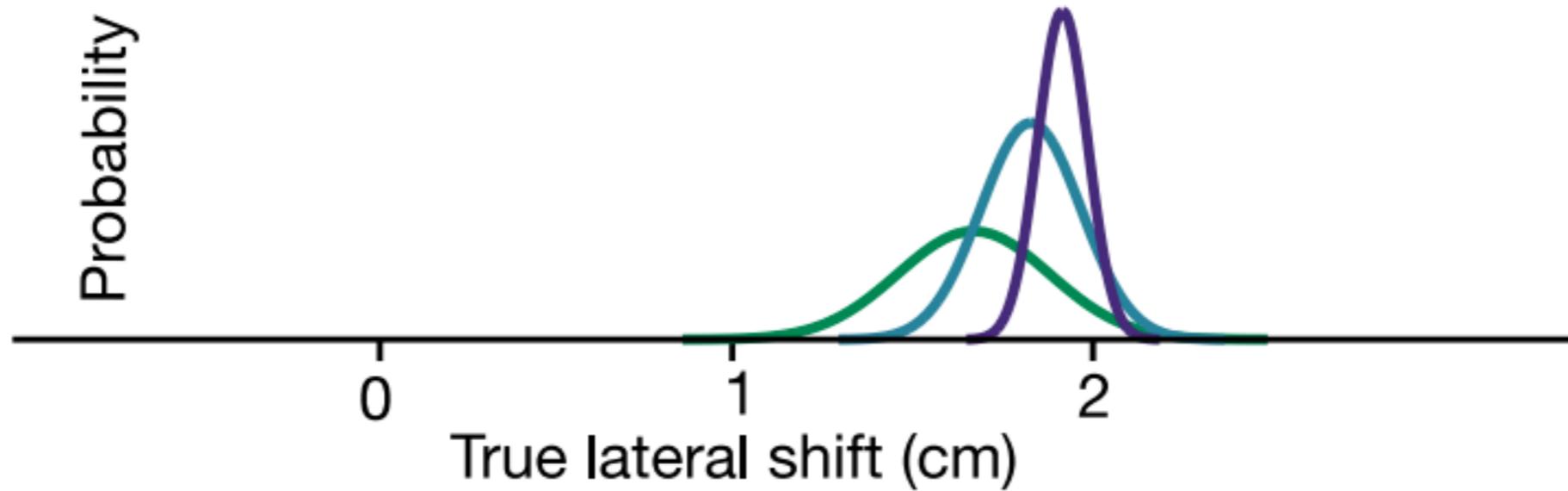
TÁBLA

BAYESIAN INTEGRATION IN SENSORIMOTOR LEARNING

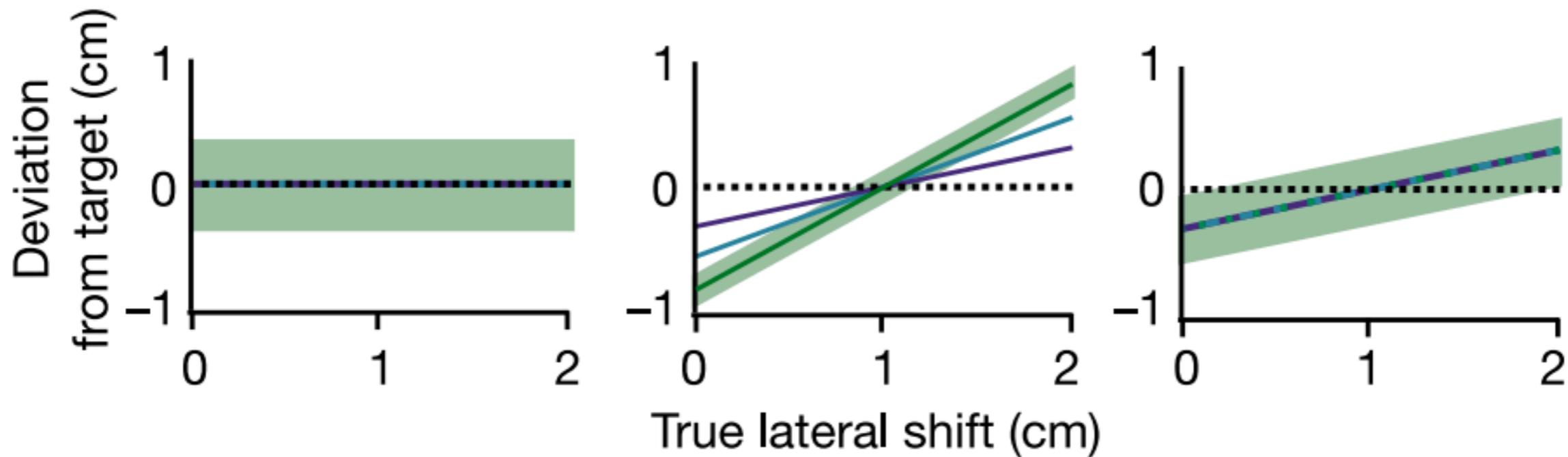


BAYESIAN INTEGRATION IN SENSORIMOTOR LEARNING

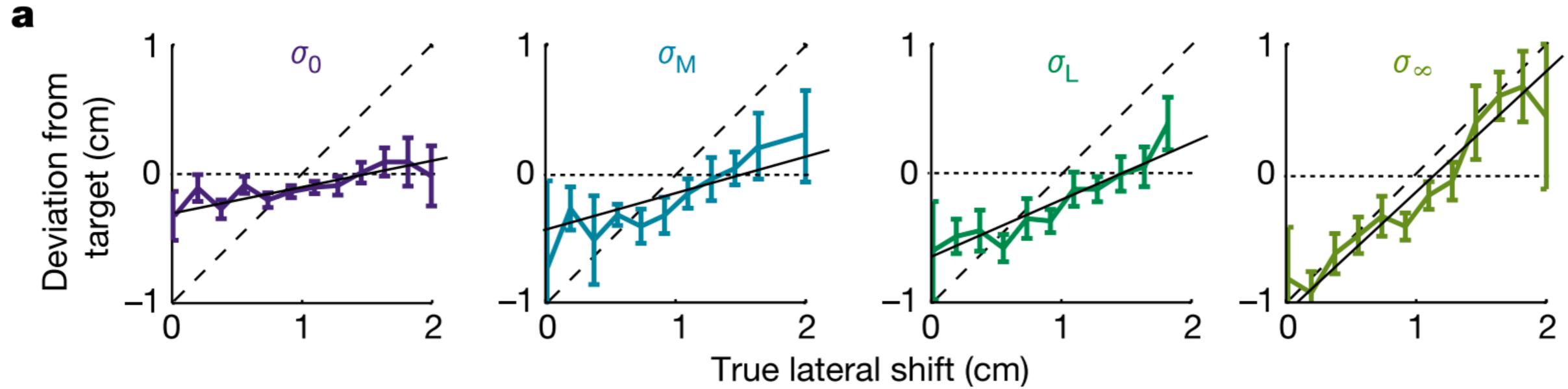
d



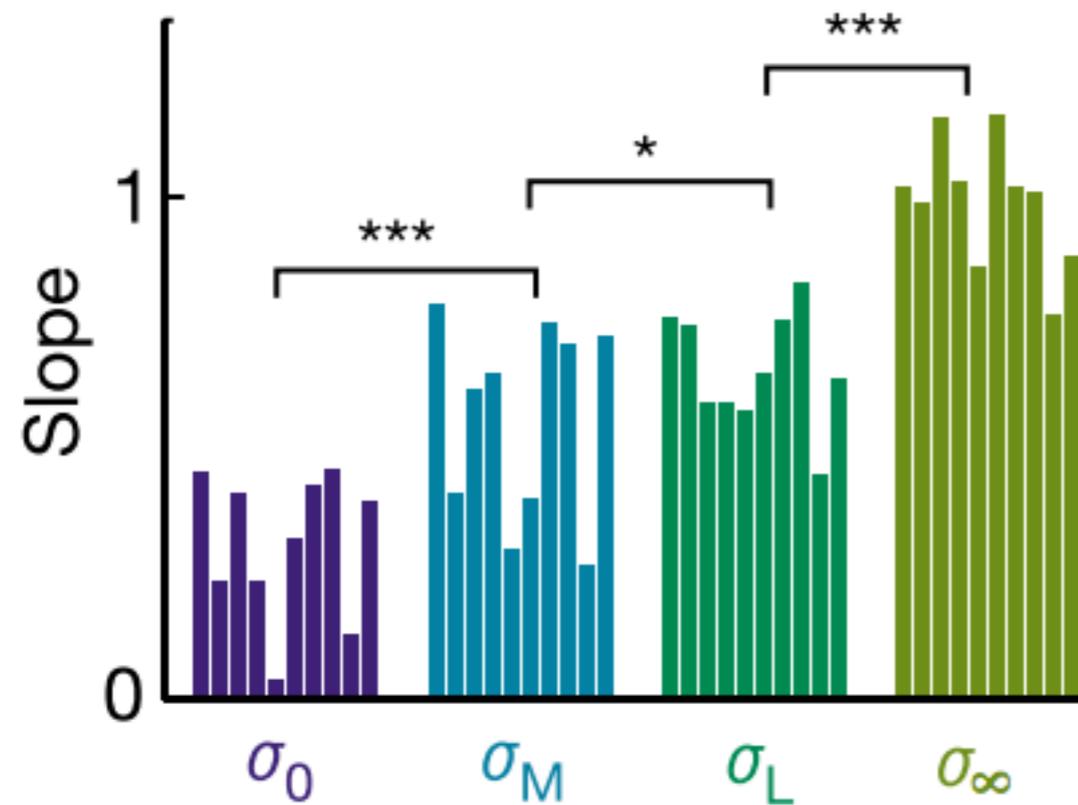
e



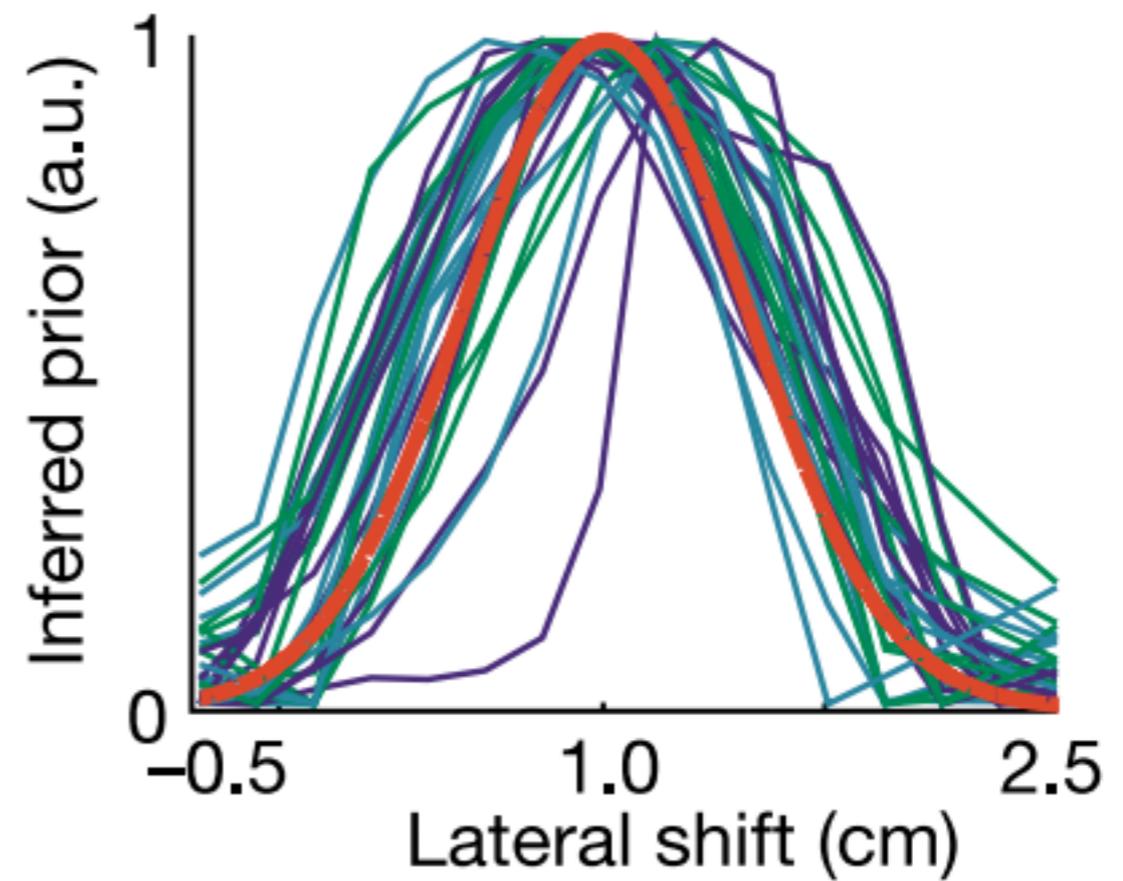
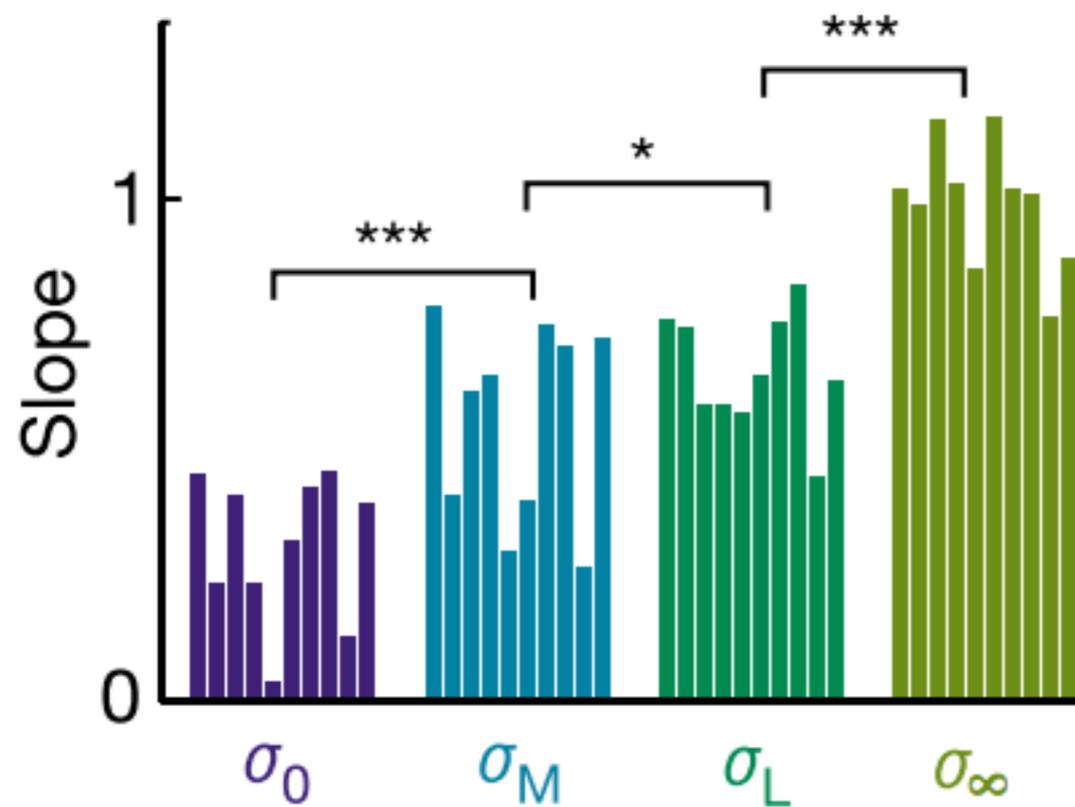
BAYESIAN INTEGRATION IN SENSORIMOTOR LEARNING



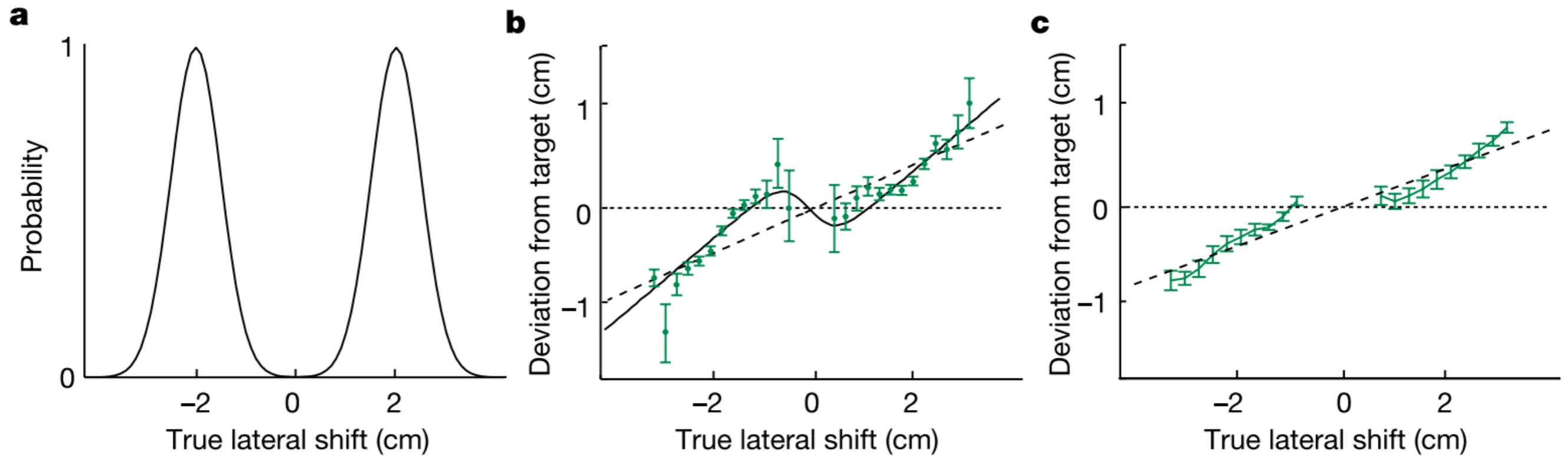
BAYESIAN INTEGRATION IN SENSORIMOTOR LEARNING



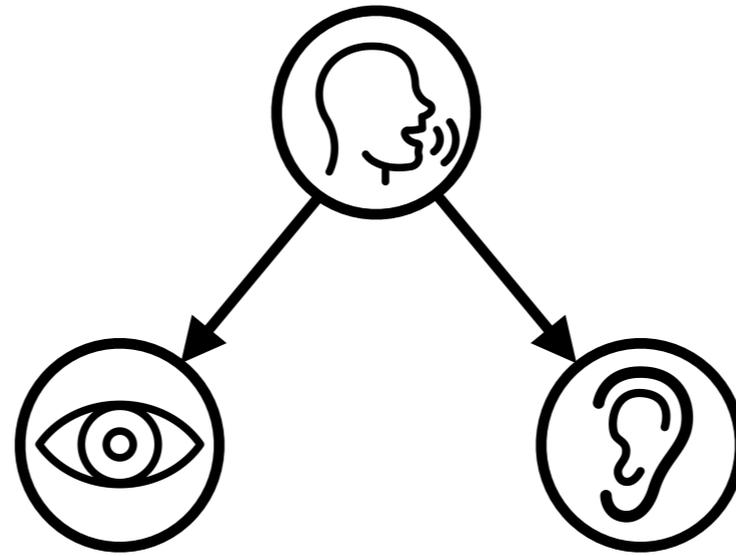
BAYESIAN INTEGRATION IN SENSORIMOTOR LEARNING



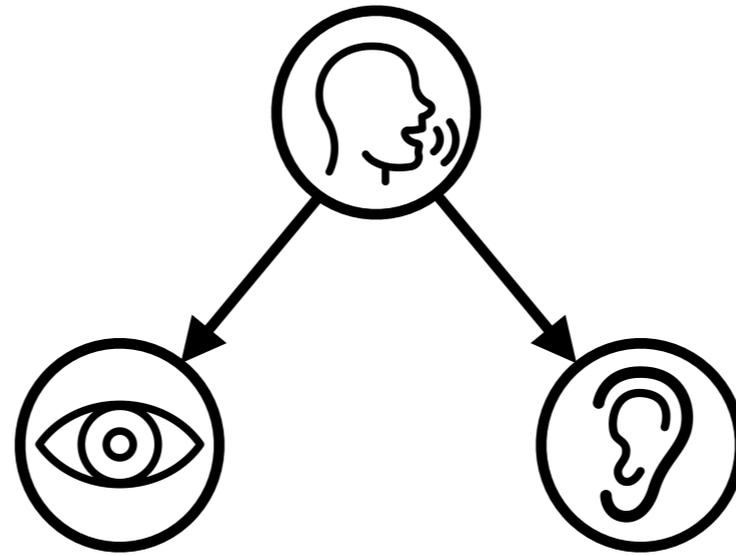
BAYESIAN INTEGRATION IN SENSORIMOTOR LEARNING



VISUAL CAPTURE

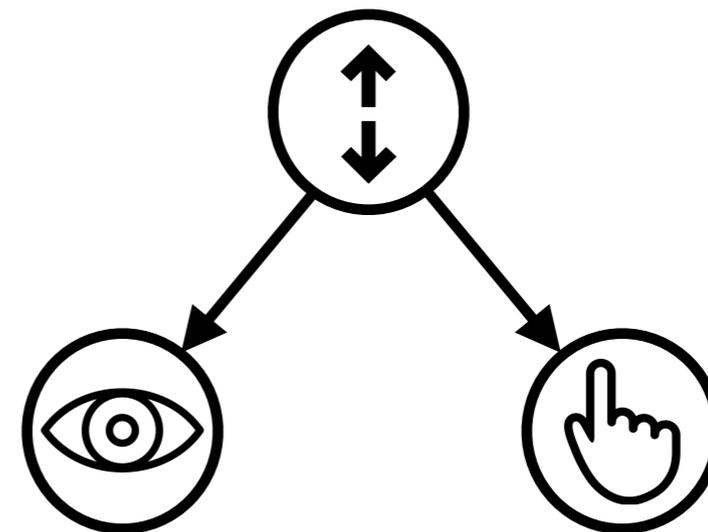
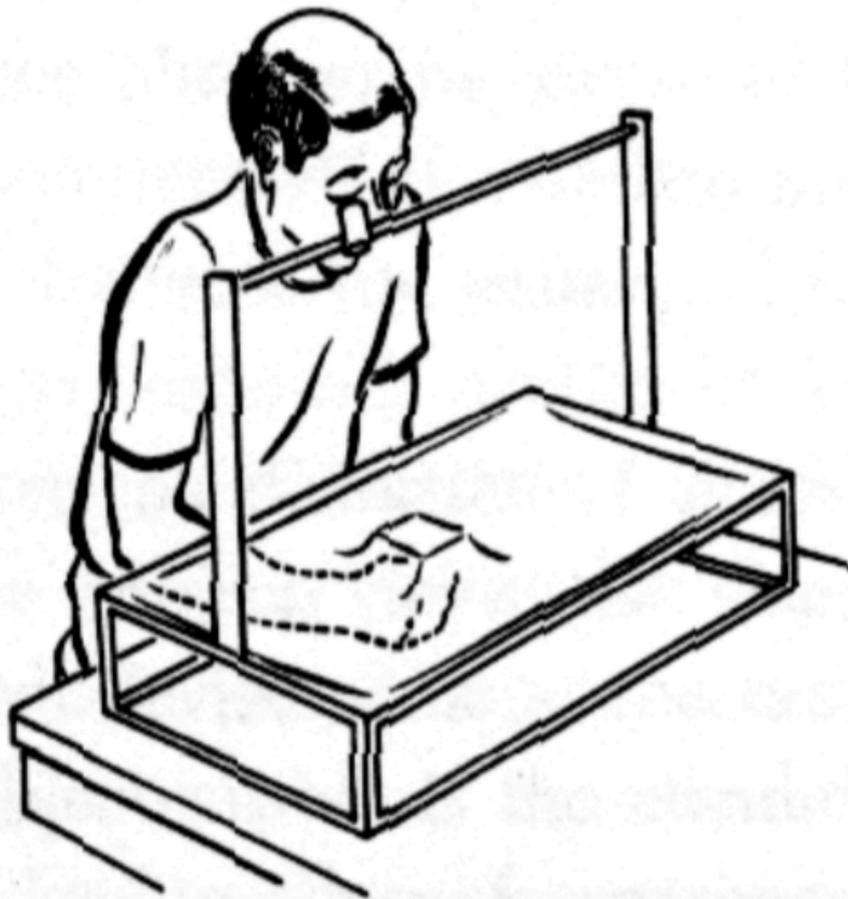


VISUAL CAPTURE



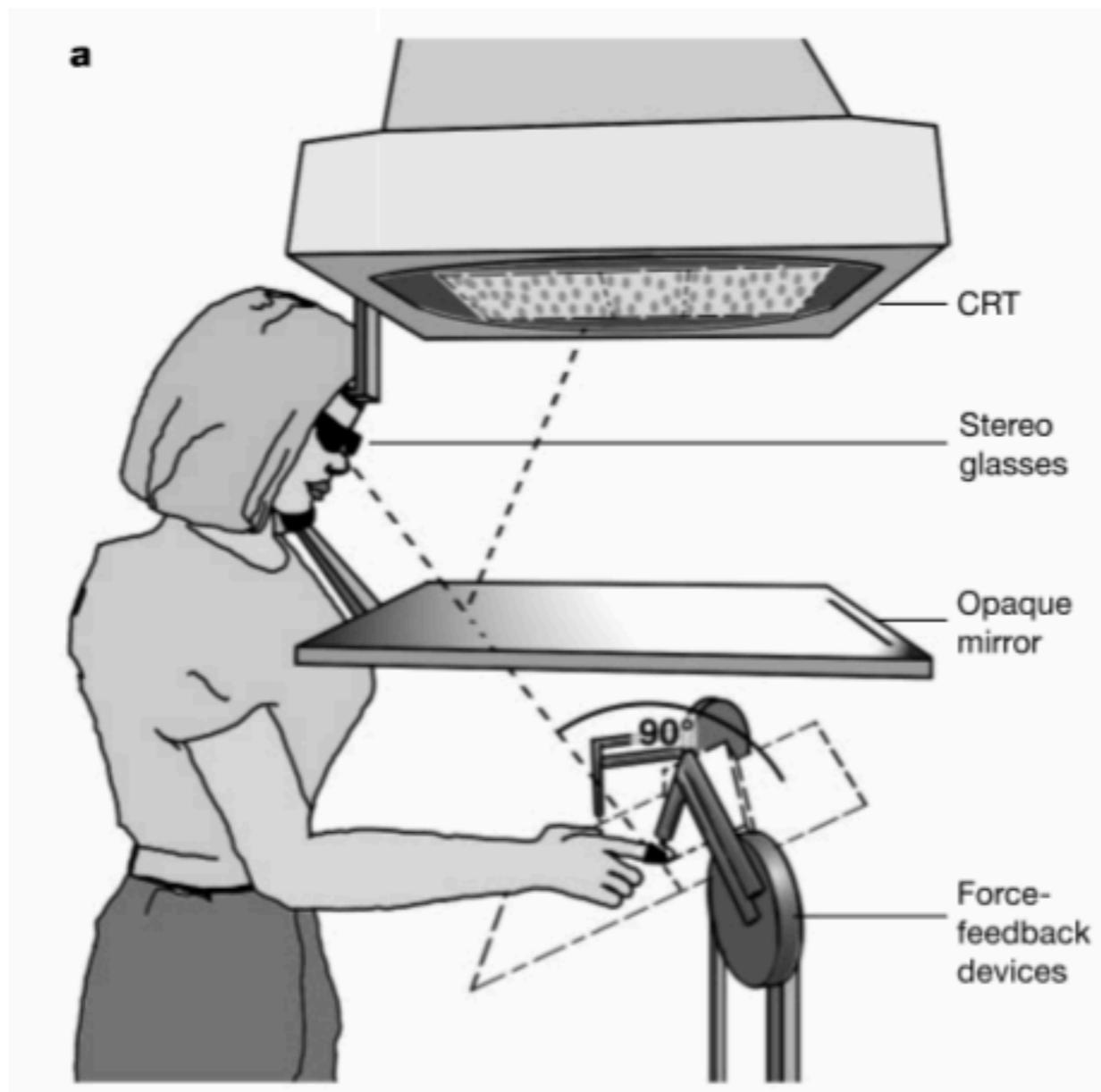
VISUAL CAPTURE

- ▶ Torzítólencsén keresztül megfigyelt objektum explorációja tapintással



Stimulus Presentation			Response Method
Vision alone	Haptic alone	Conflict	
V  1.90	H  0.98	V H  1.85	Drawing 

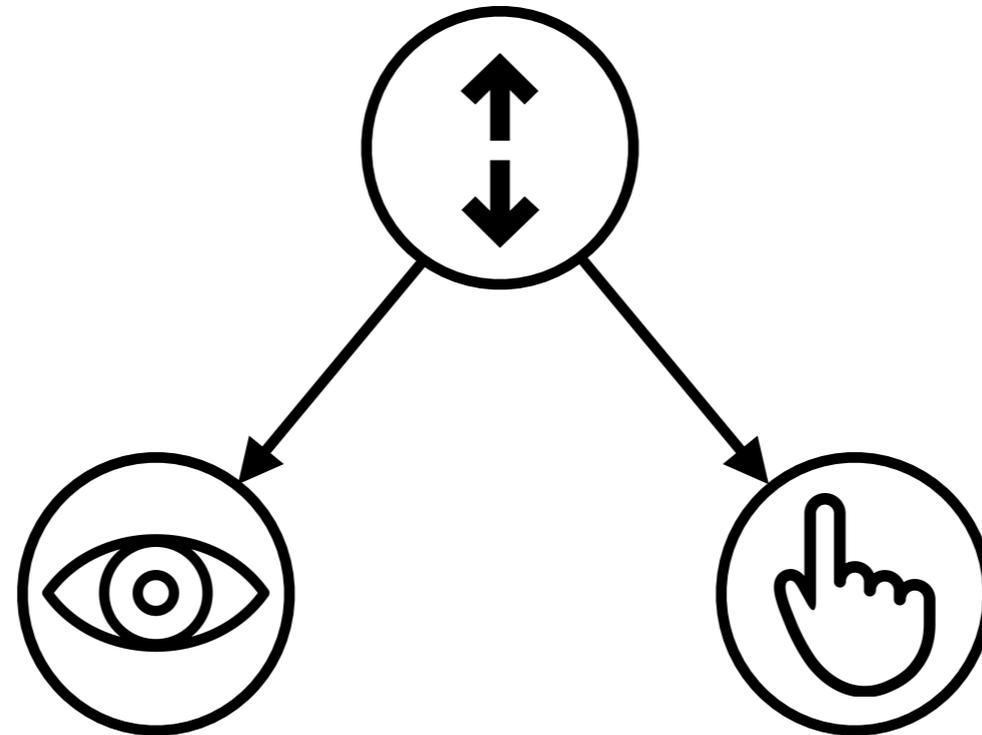
CUE INTEGRATION



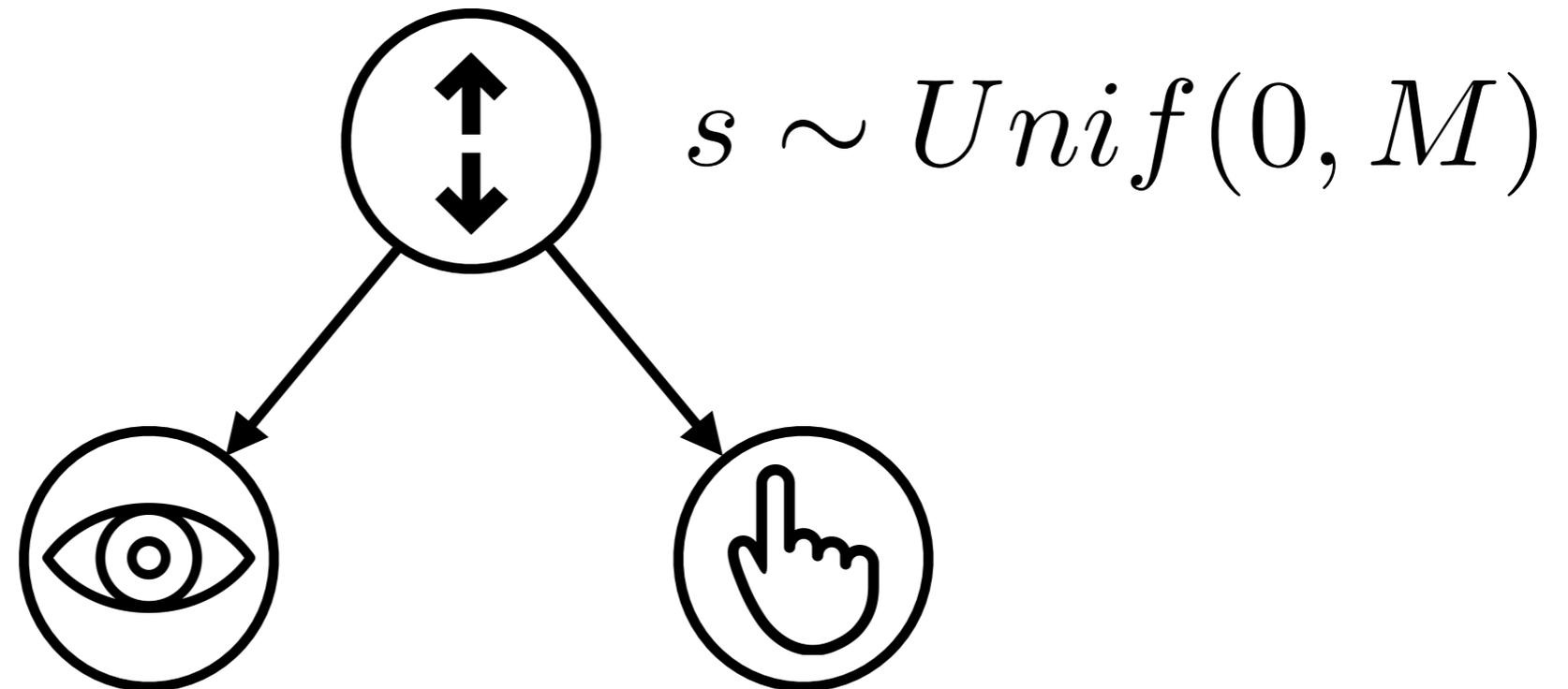
- ▶ Méretbecslés
- ▶ Vizuális információ
- ▶ Haptikus információ

- ▶ A kettő forrás
"információtartalma",
vagyis a hozzáadott zaj
volt variálva

CUE INTEGRATION

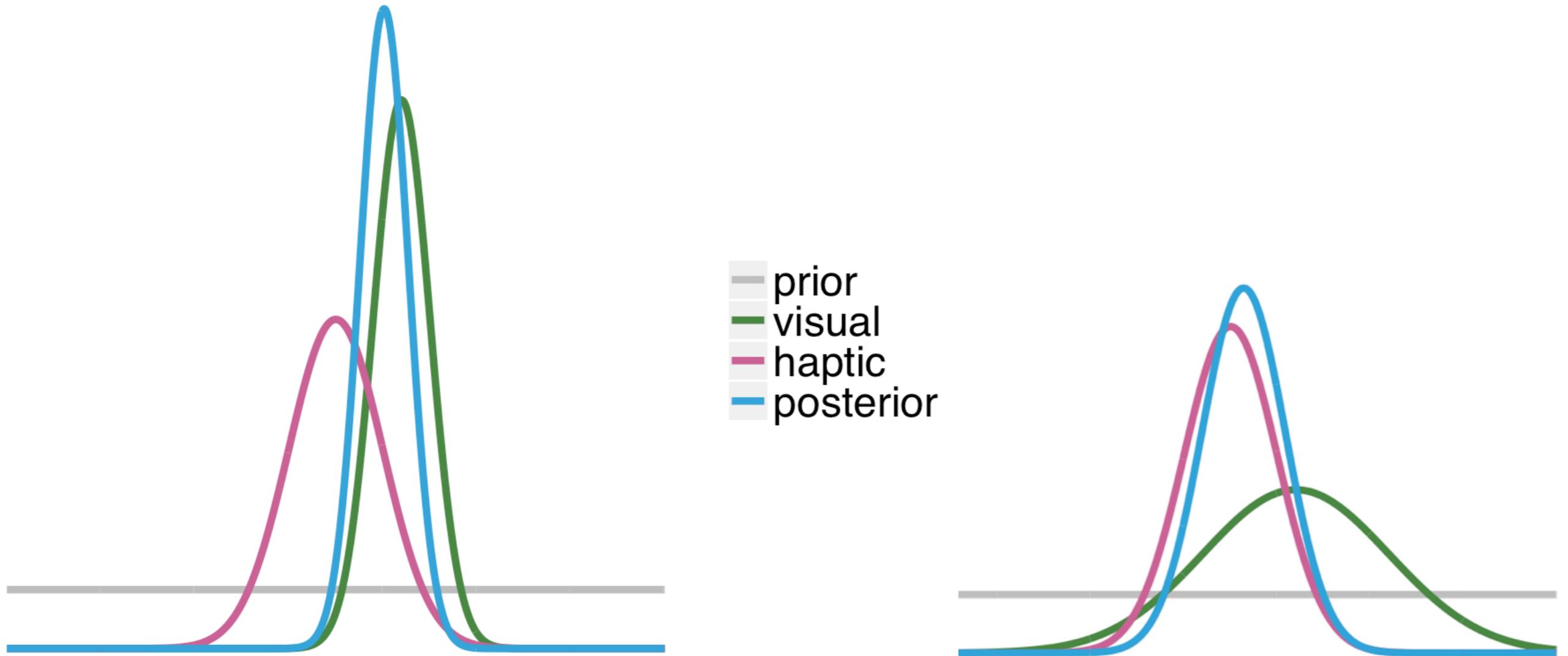


CUE INTEGRATION



$$X_v | s \sim N(s, \sigma_v) \quad X_h | s \sim N(s, \sigma_h)$$

CUE INTEGRATION

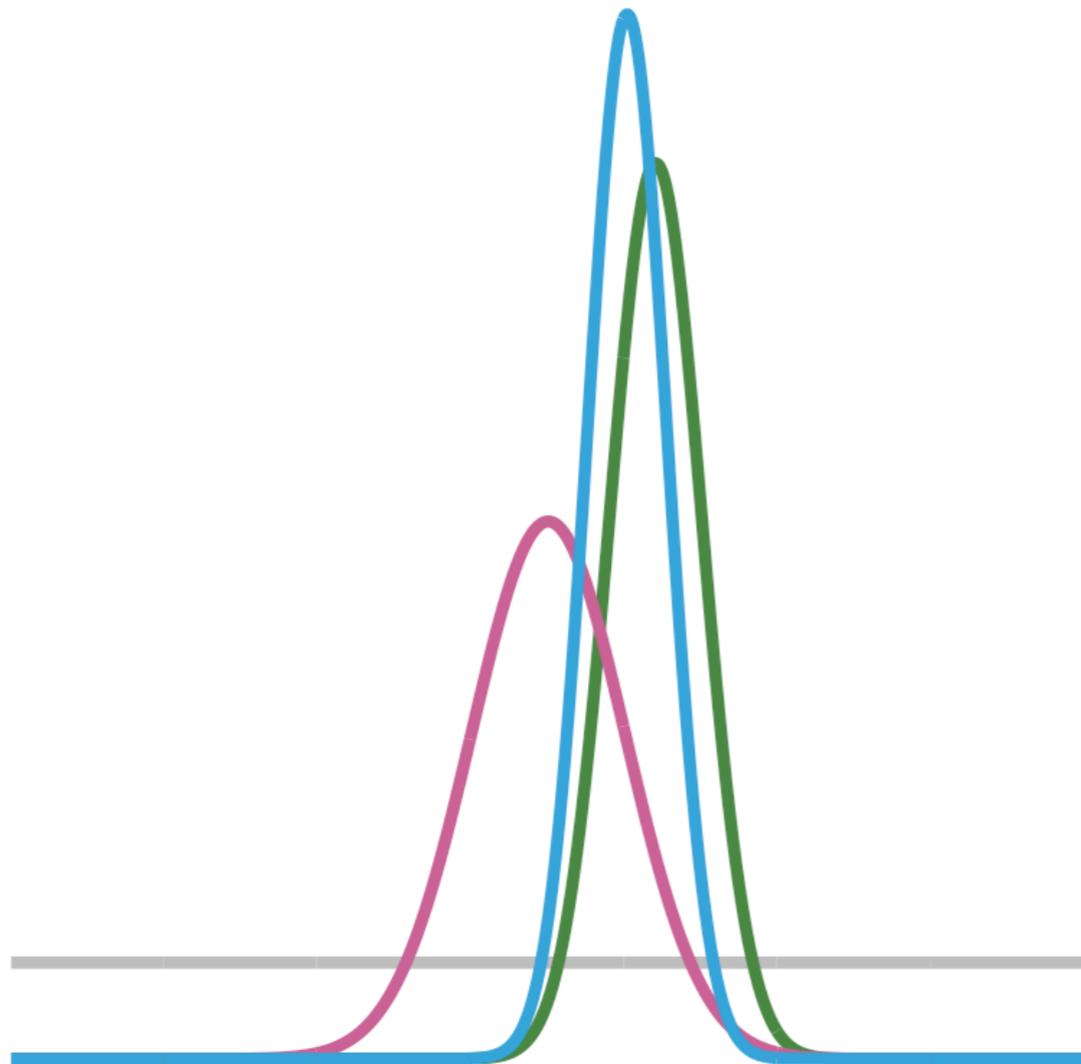


CUE INTEGRATION

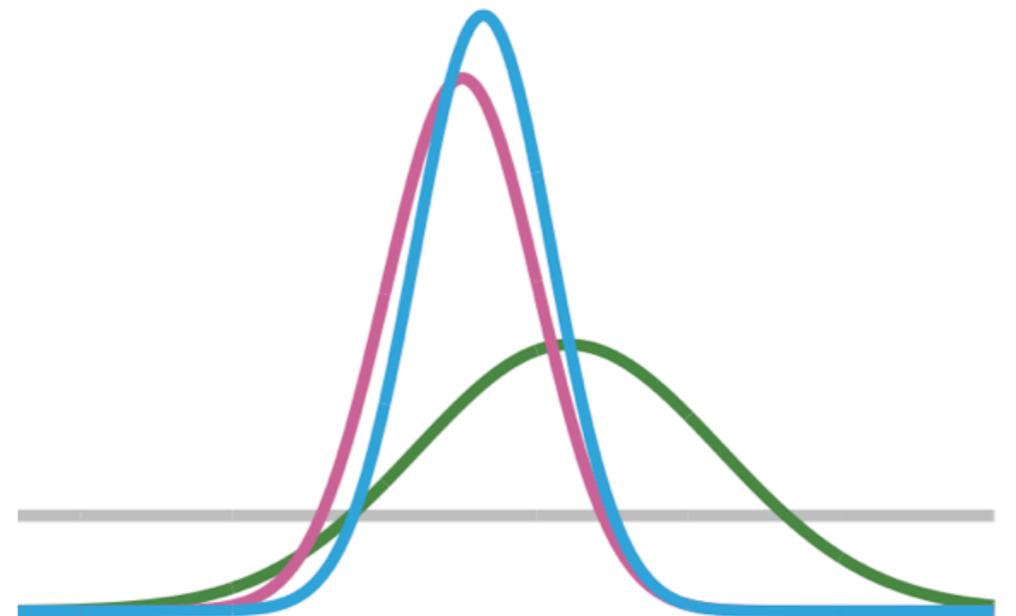
$$\hat{s} \sim \mathcal{N}(\hat{\mu}, \hat{\sigma}^2)$$

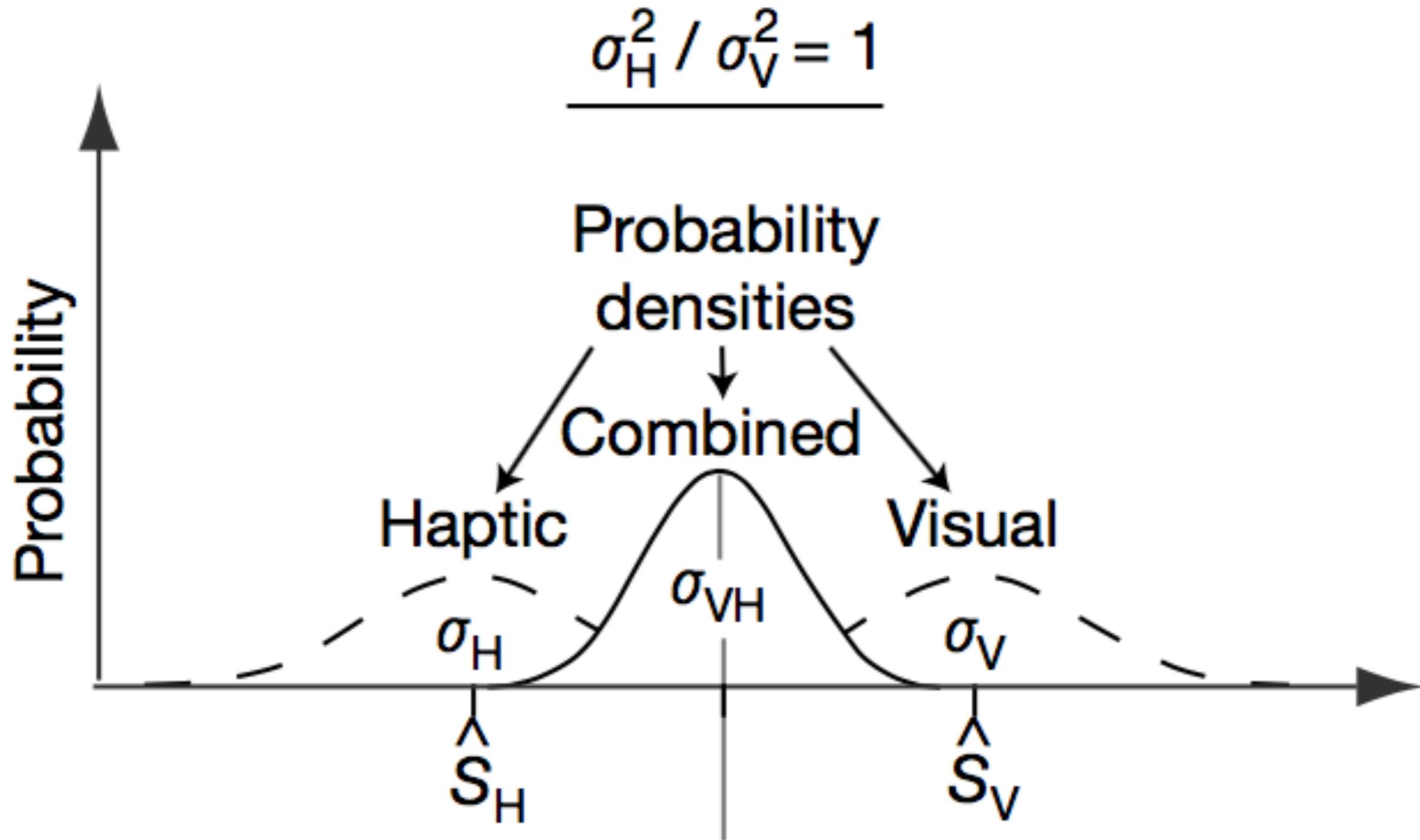
$$\hat{\mu} = \frac{\frac{X_v}{\sigma_v^2} + \frac{X_h}{\sigma_h^2}}{\frac{1}{\sigma_h^2} + \frac{1}{\sigma_v^2}}$$

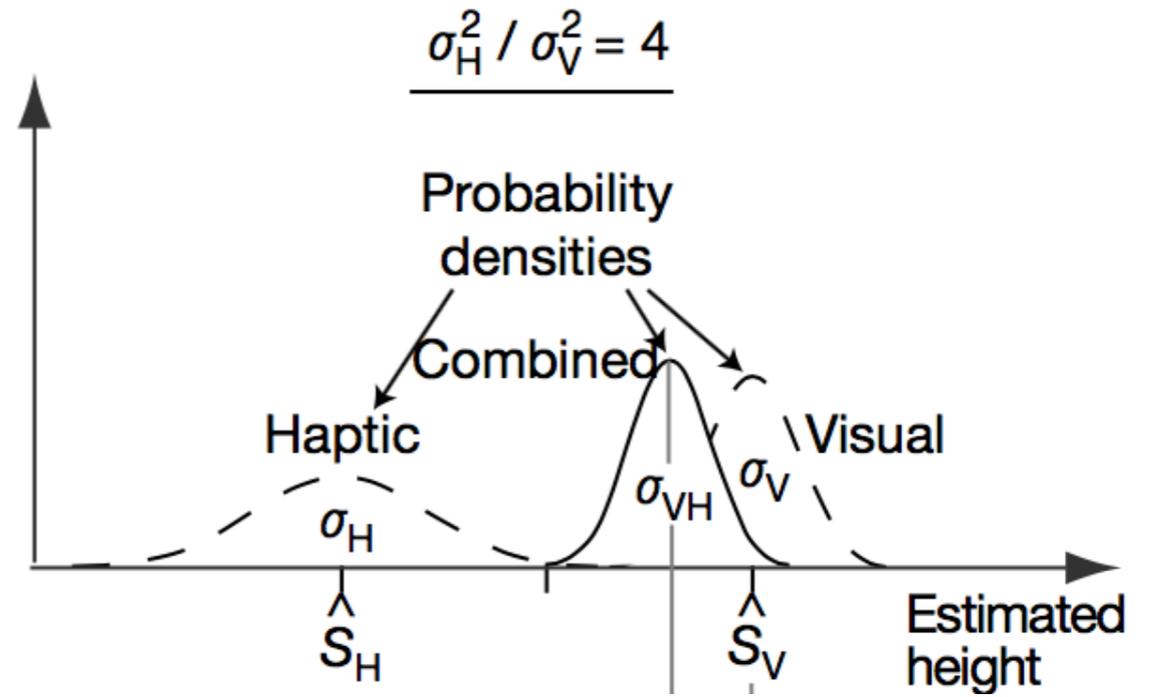
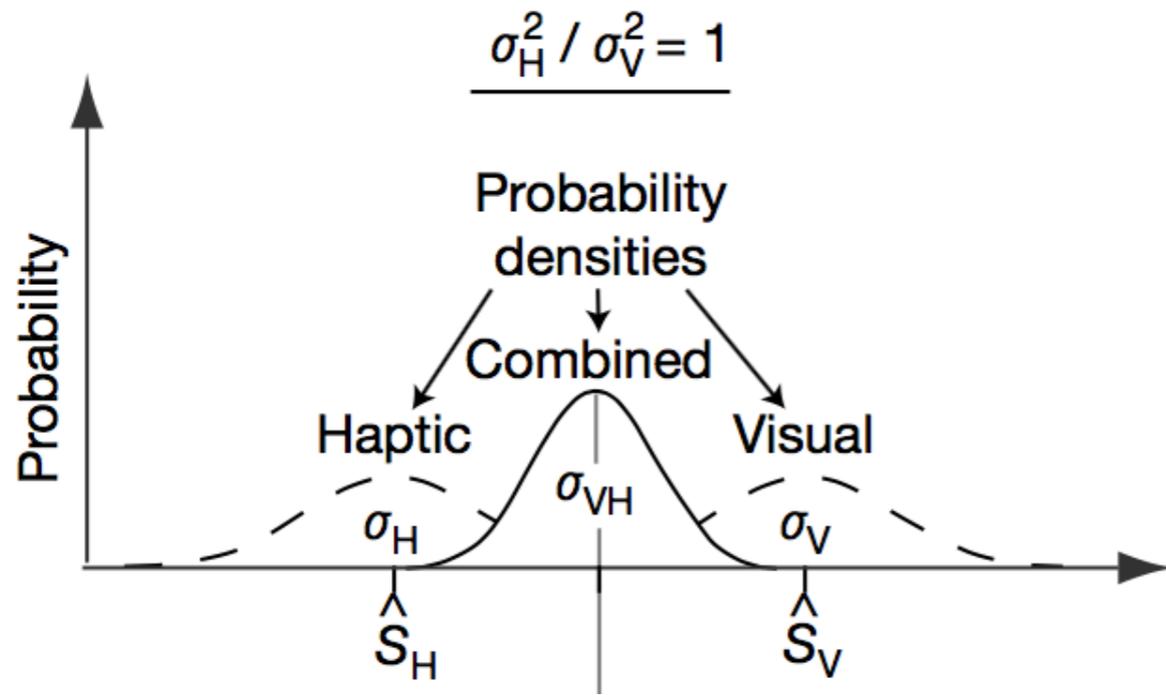
$$\frac{1}{\hat{\sigma}^2} = \frac{1}{\sigma_h^2} + \frac{1}{\sigma_v^2}$$

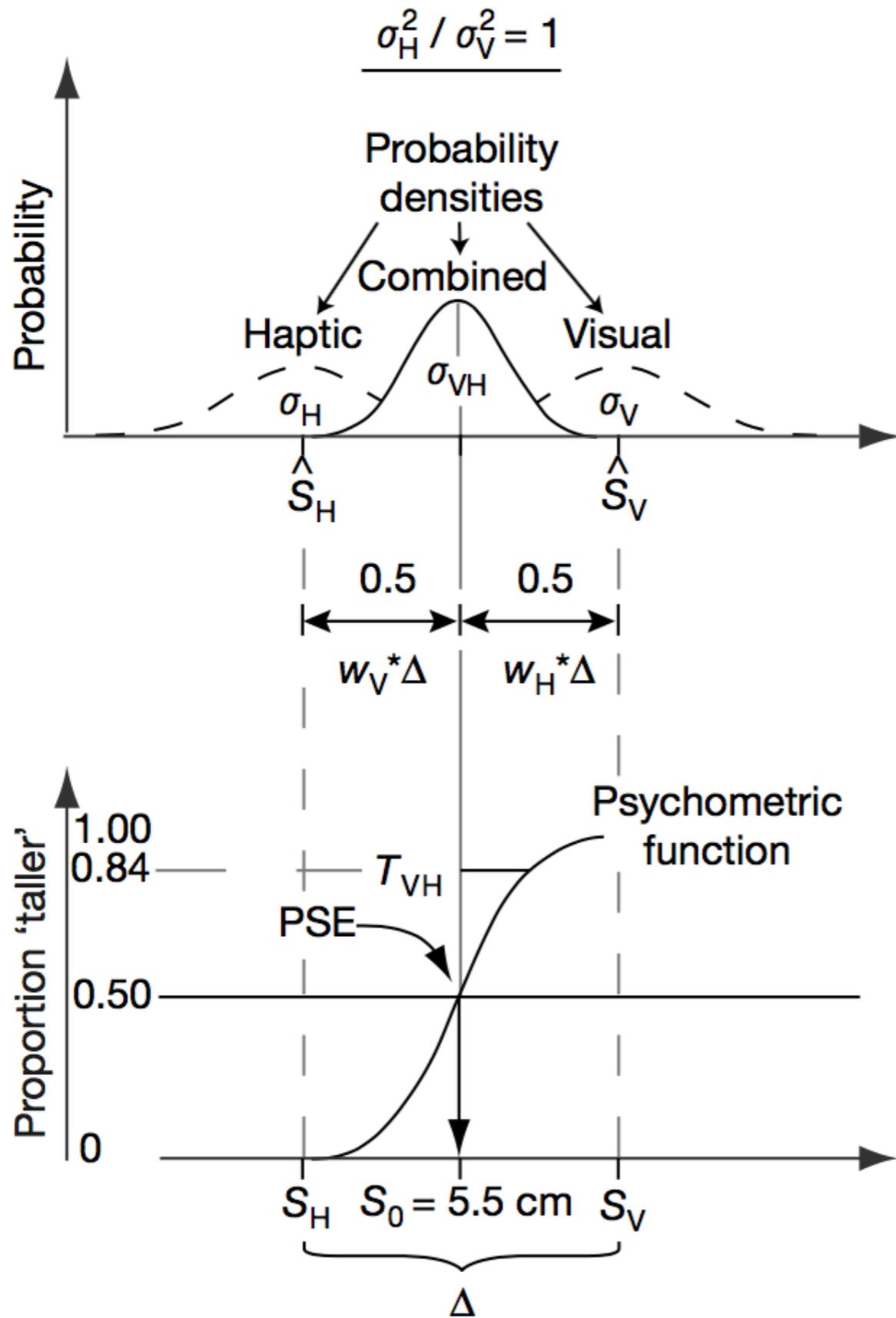


— prior
— visual
— haptic
— posterior





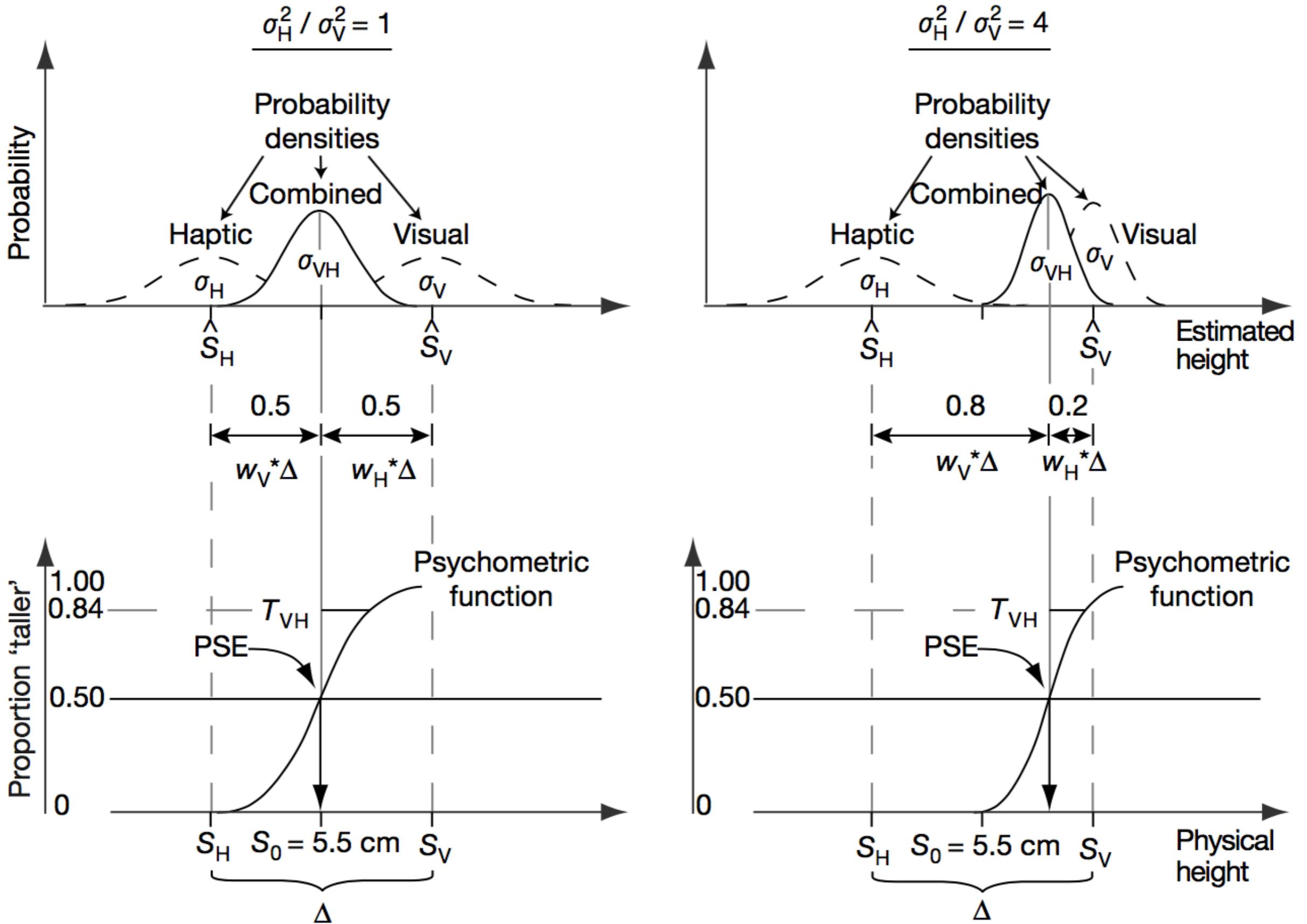




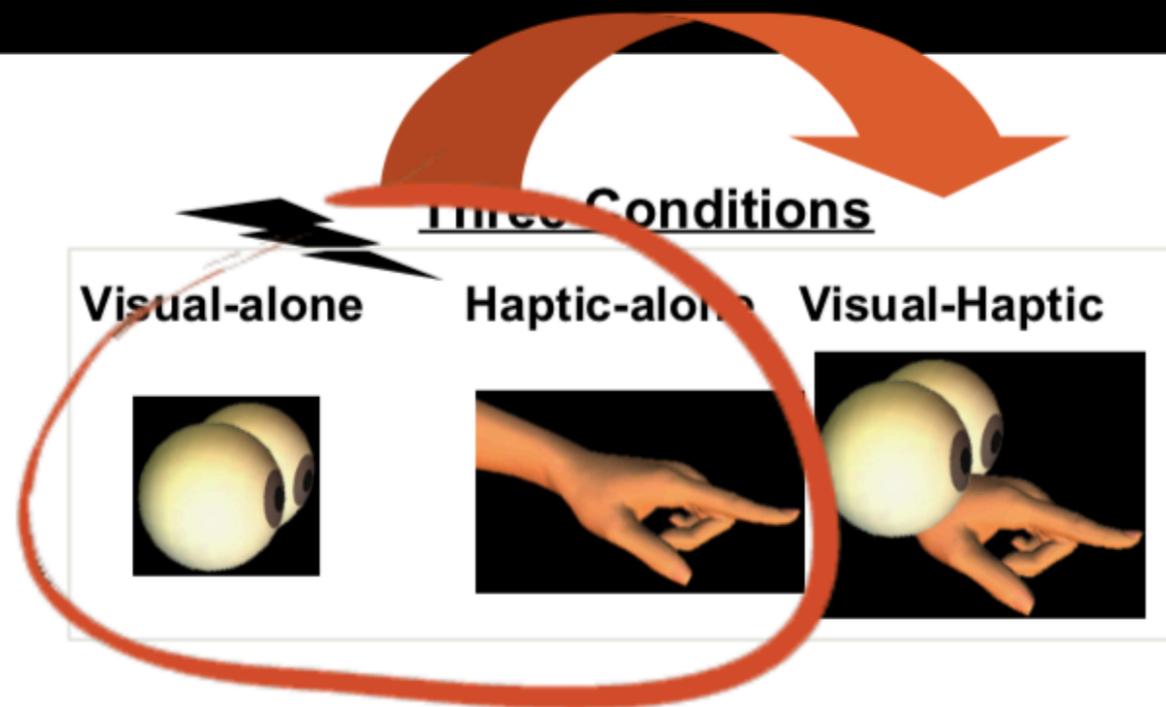
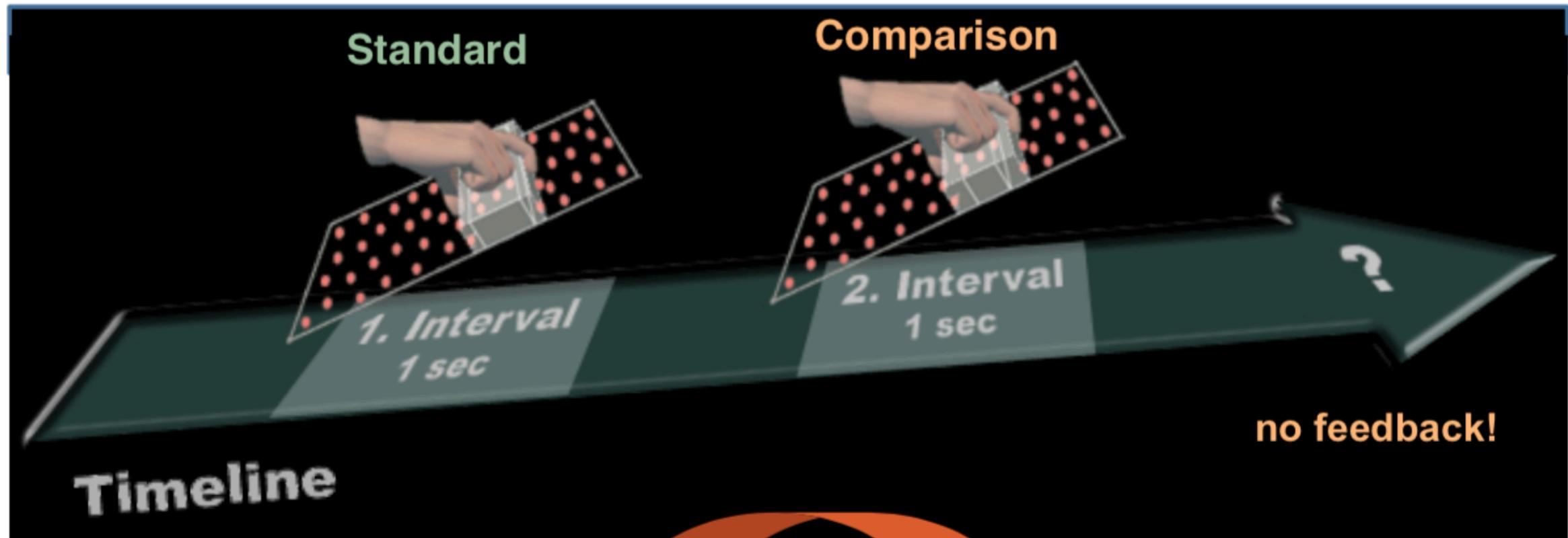
CUMULATIVE DENSITY FUNCTION (CDF)

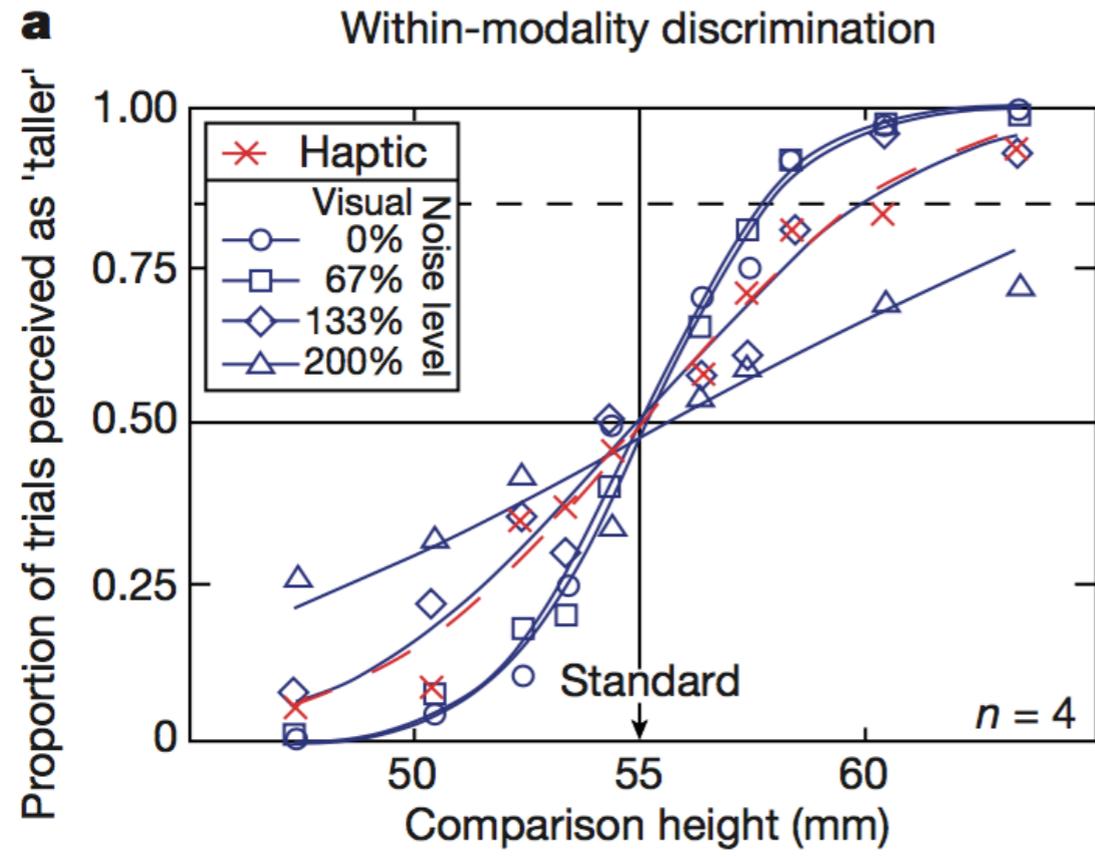
$$F_X(x) = P(X \leq x)$$

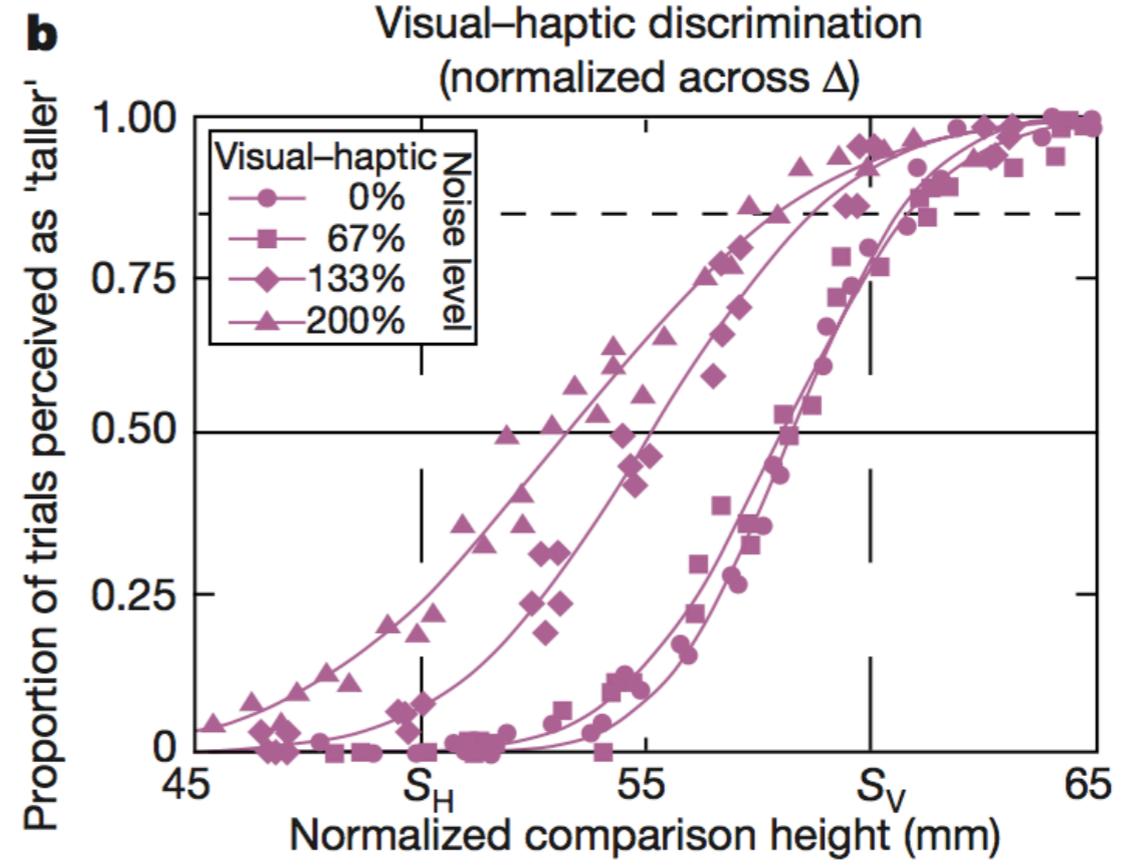
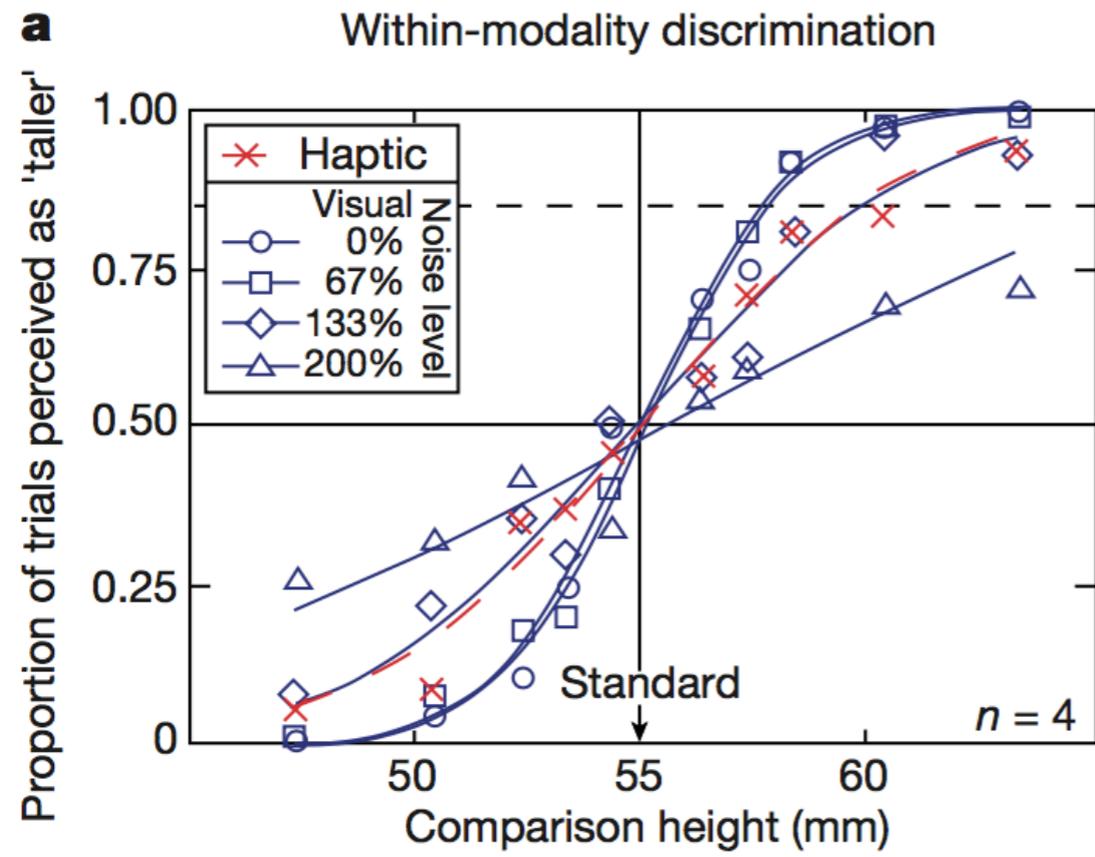
$$\text{CDF}_X(x) = \int_{-\infty}^x \text{pdf}_X(\tilde{x}) d\tilde{x}$$

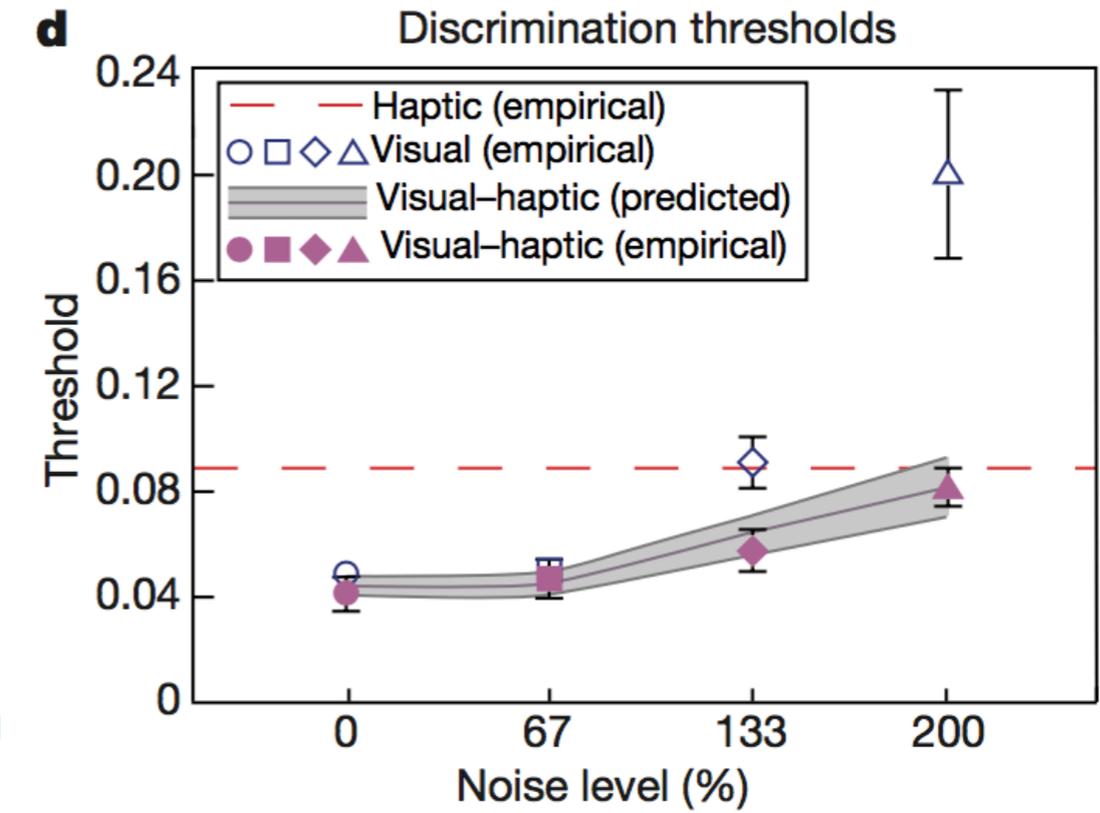
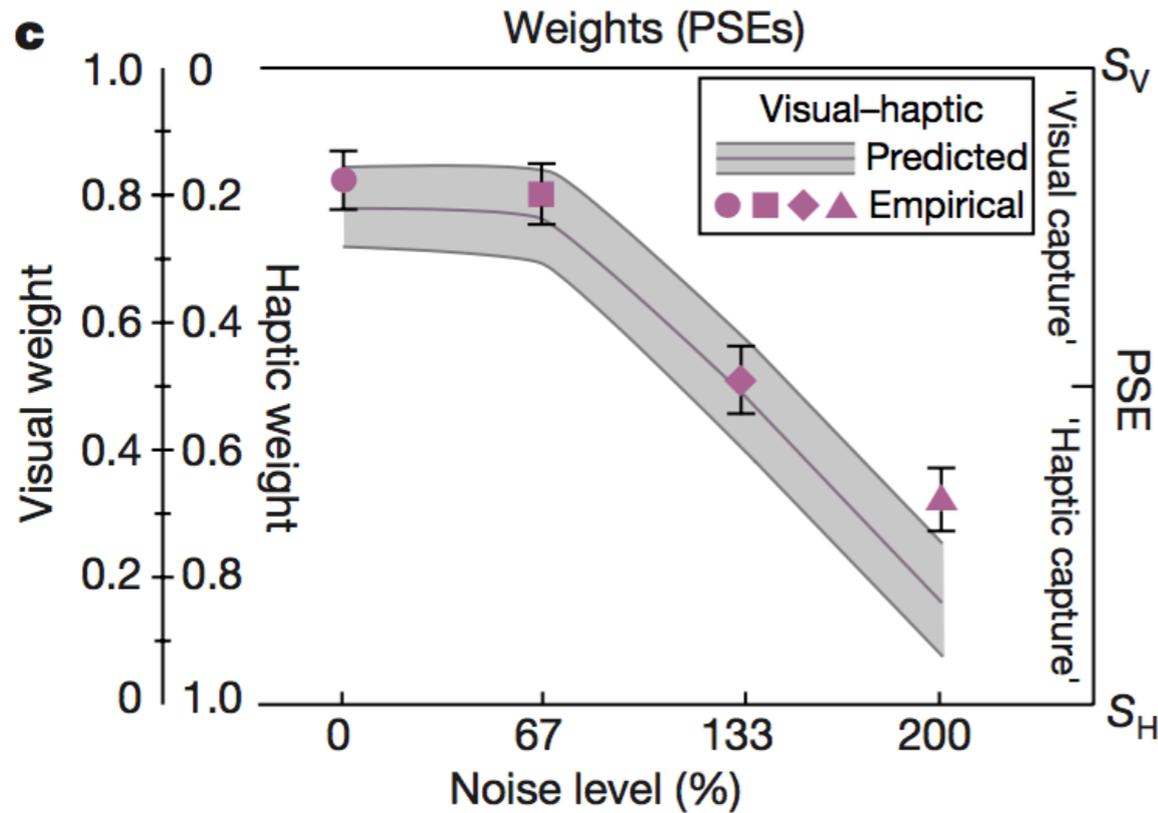
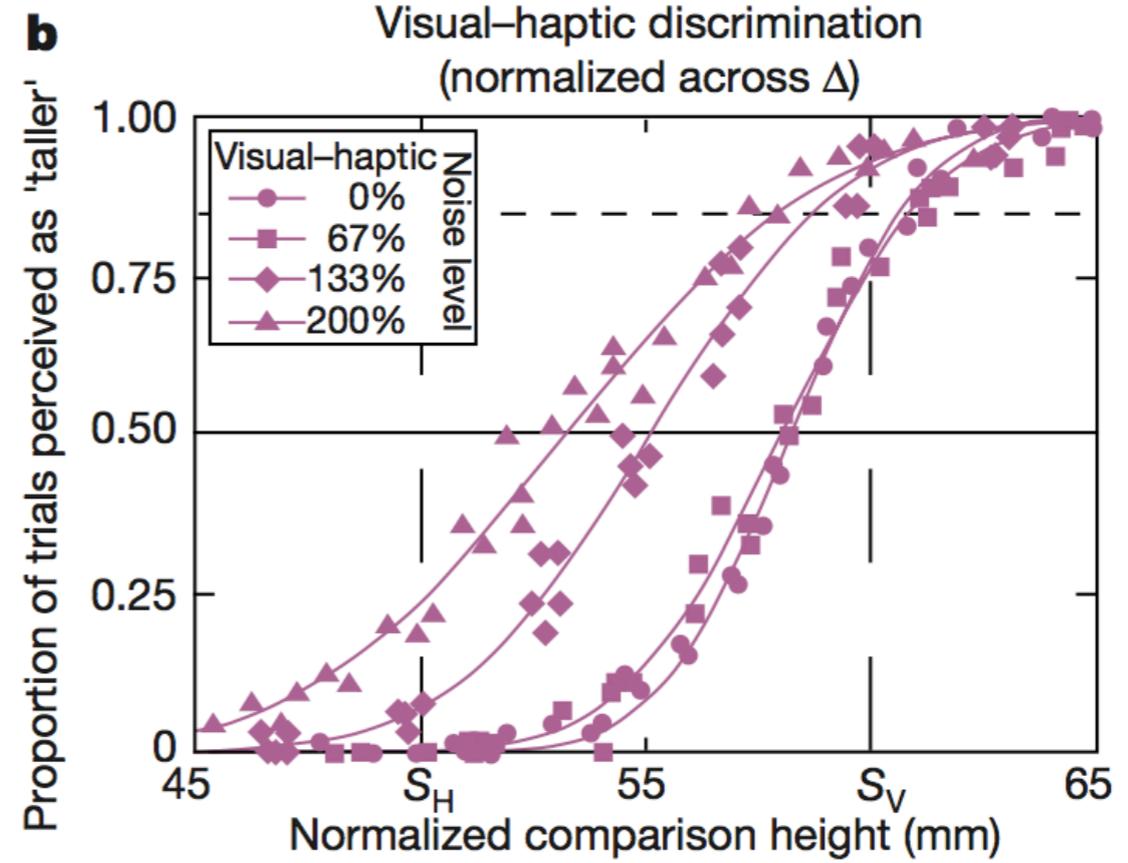
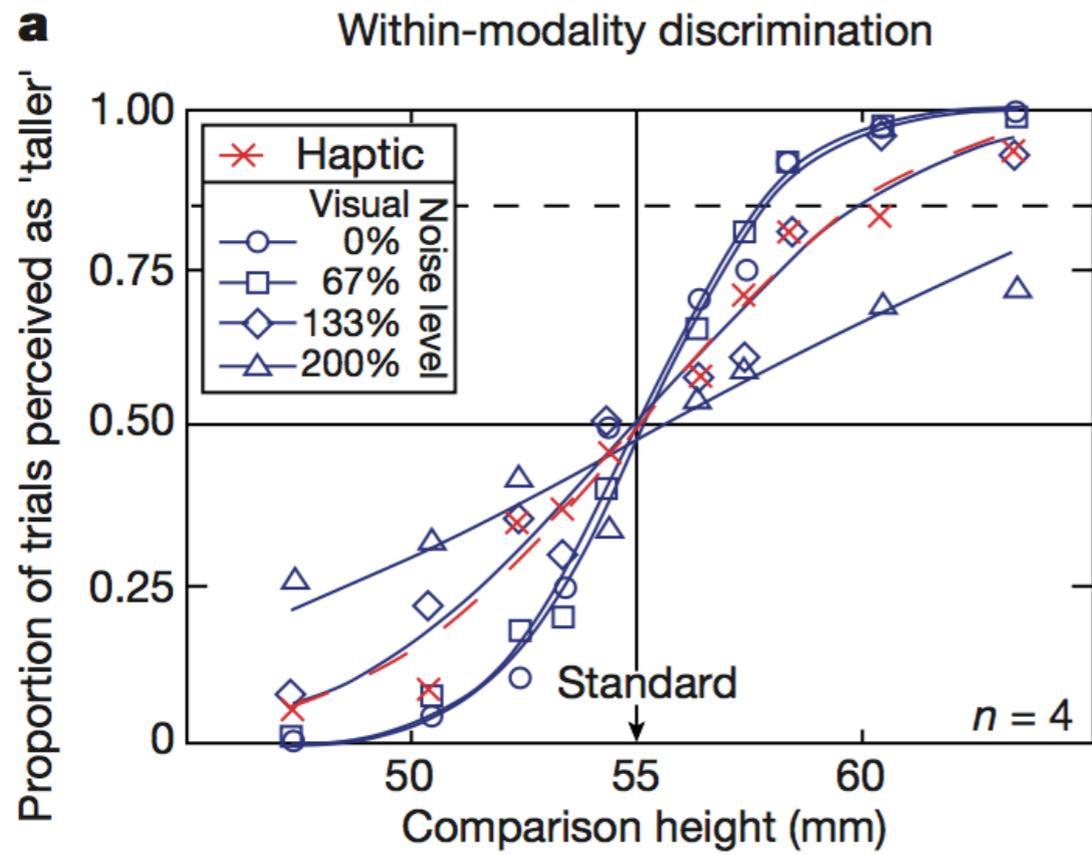


2-IFC Task

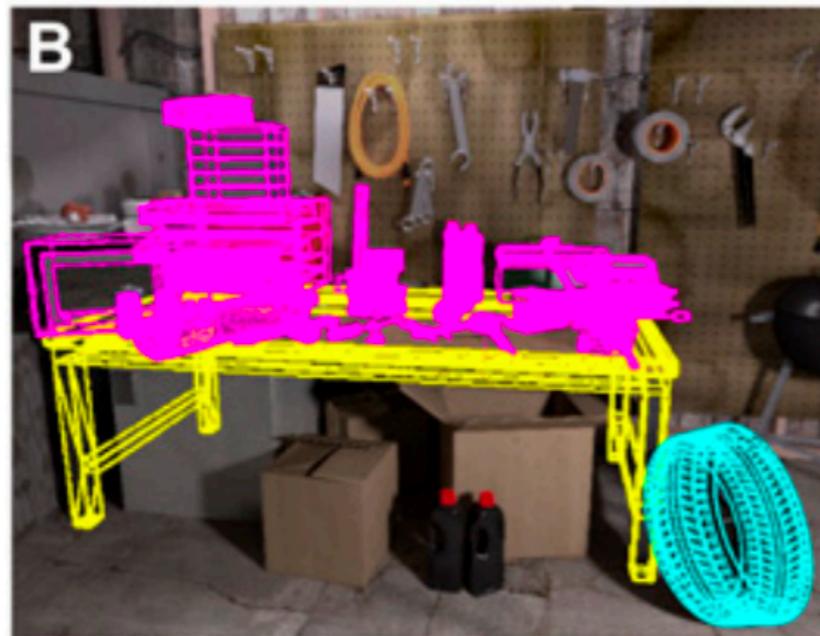




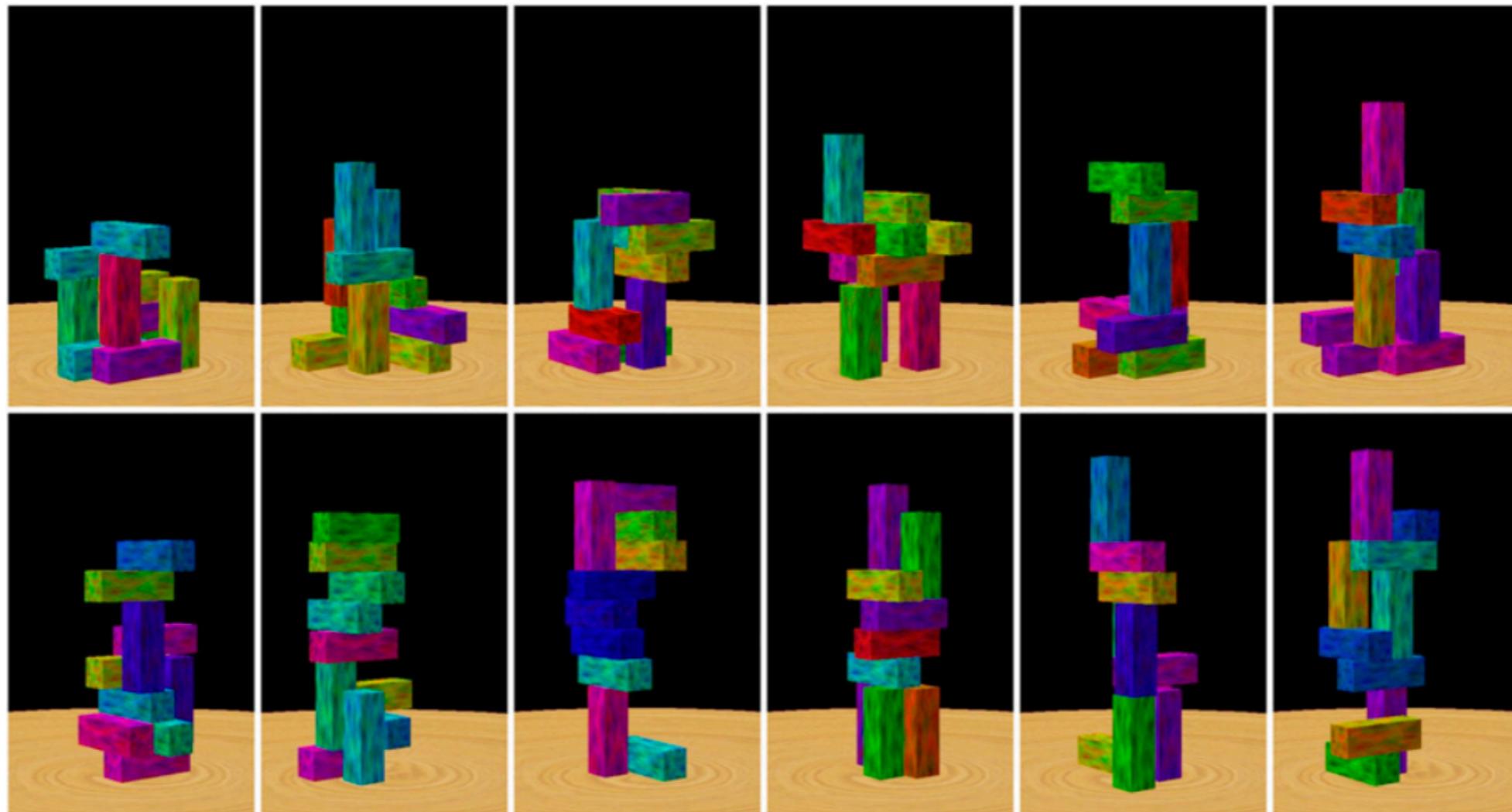


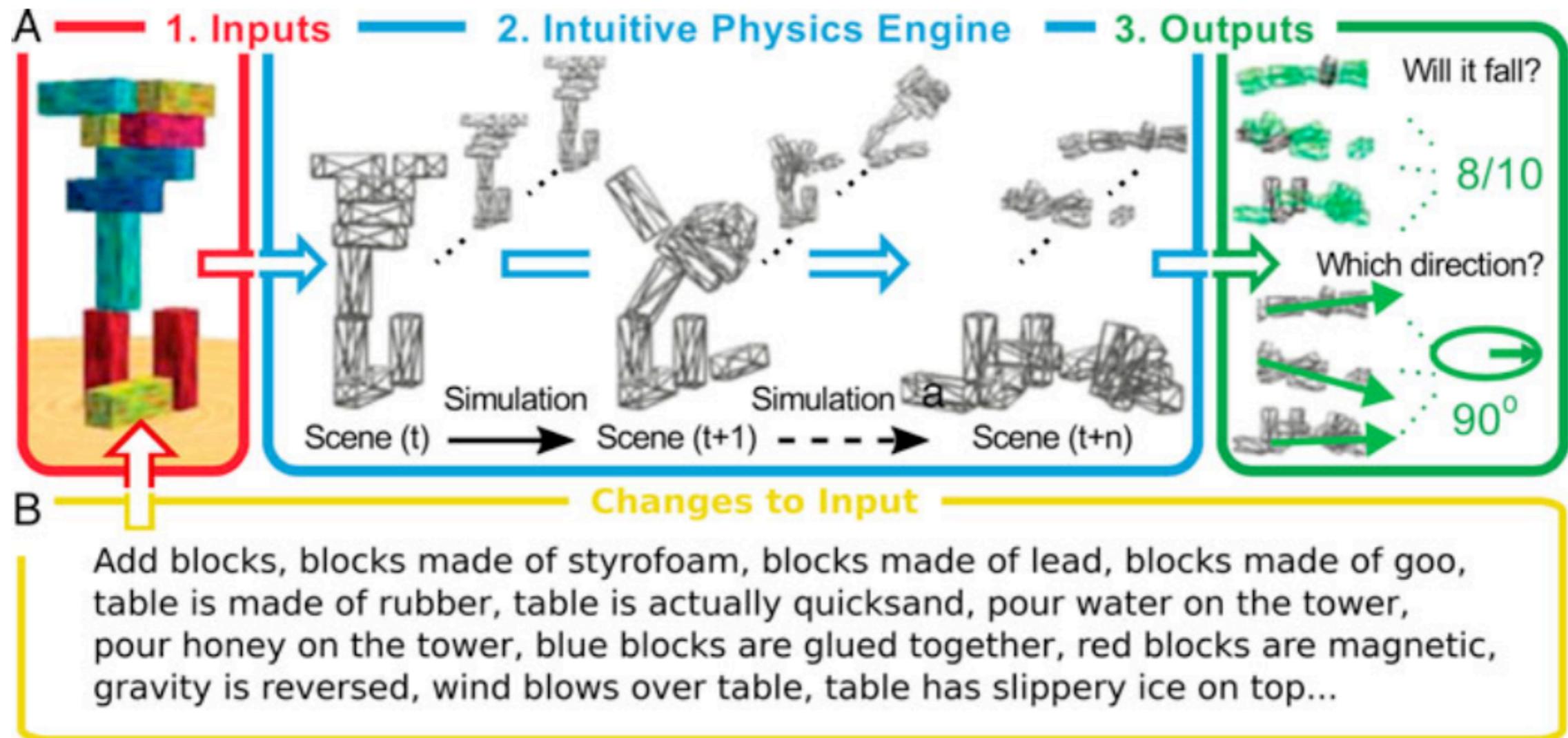


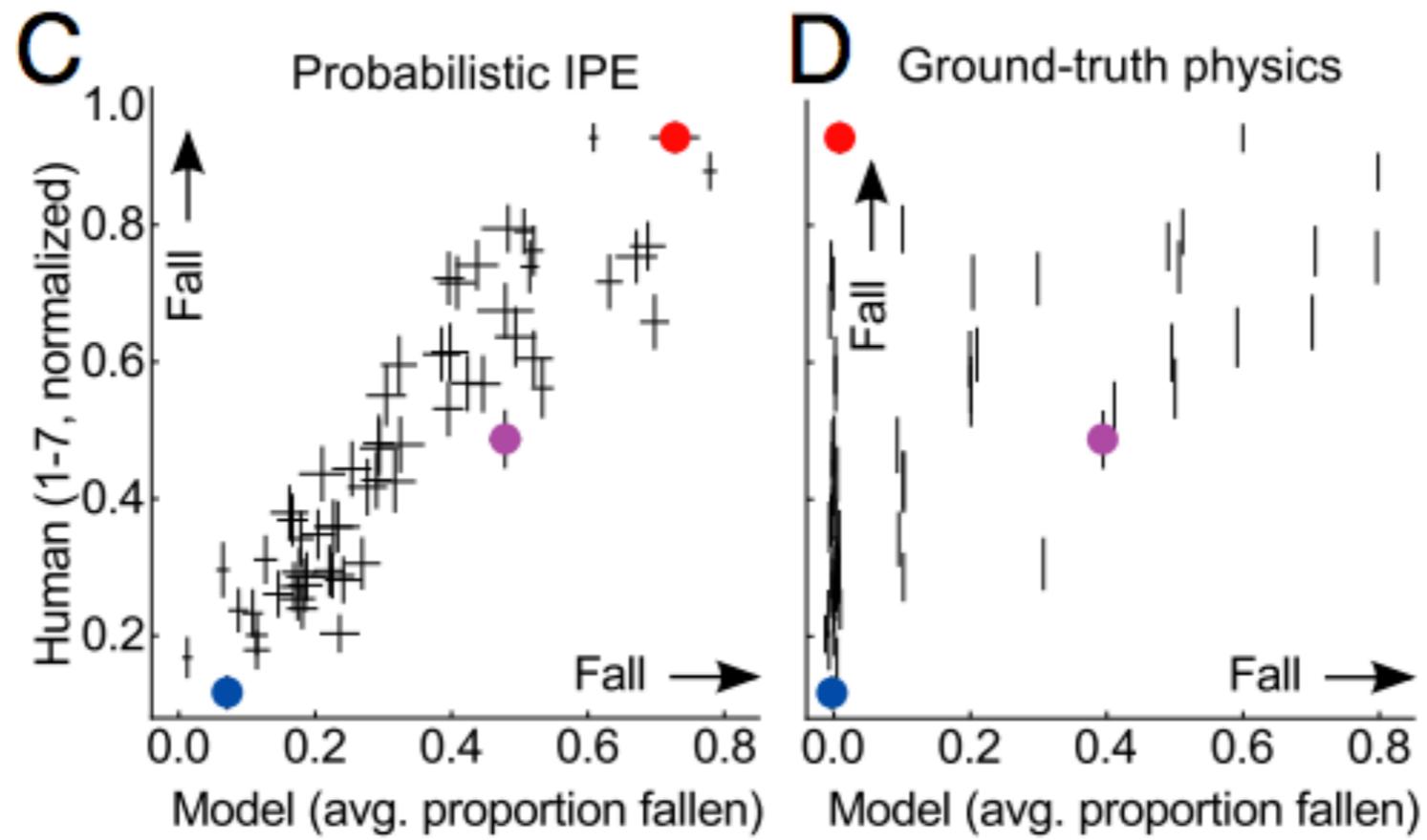
INTUITIVE PHYSICS



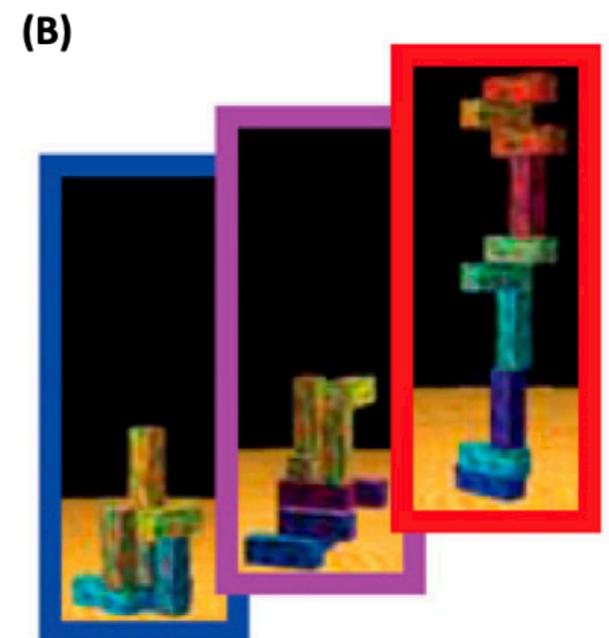
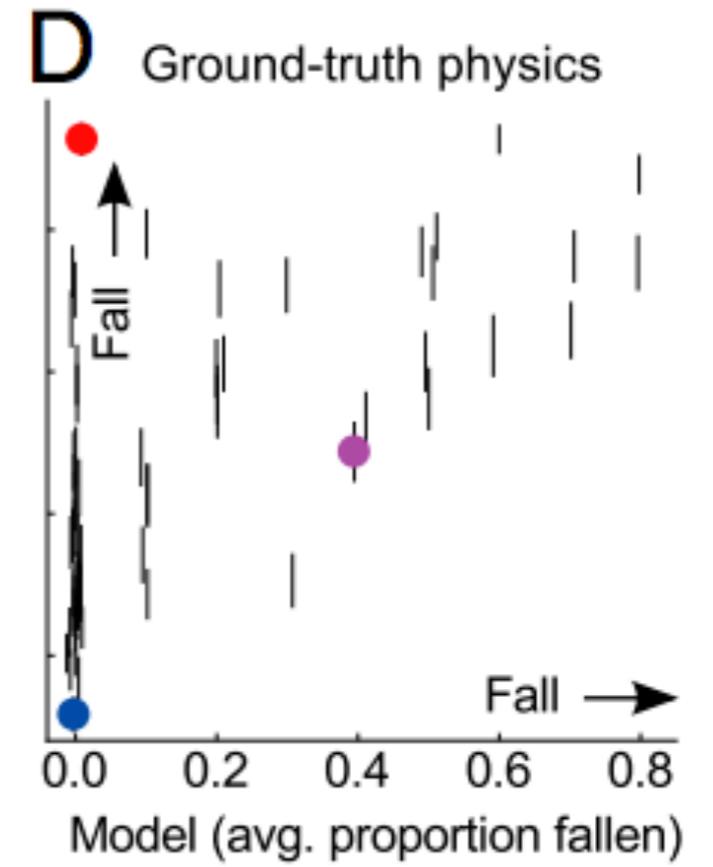
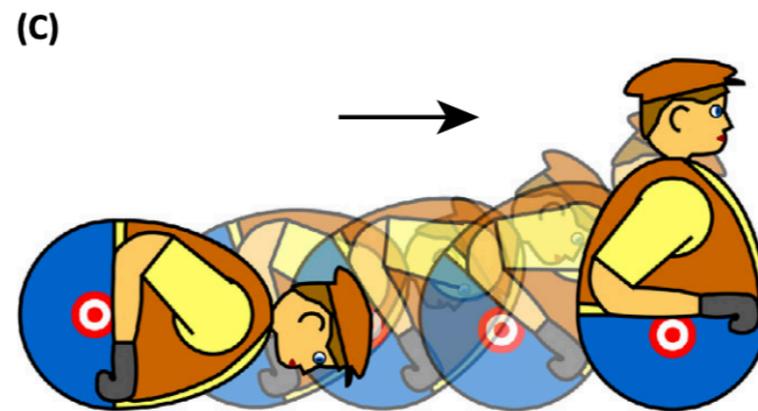
INTUITIVE PHYSICS



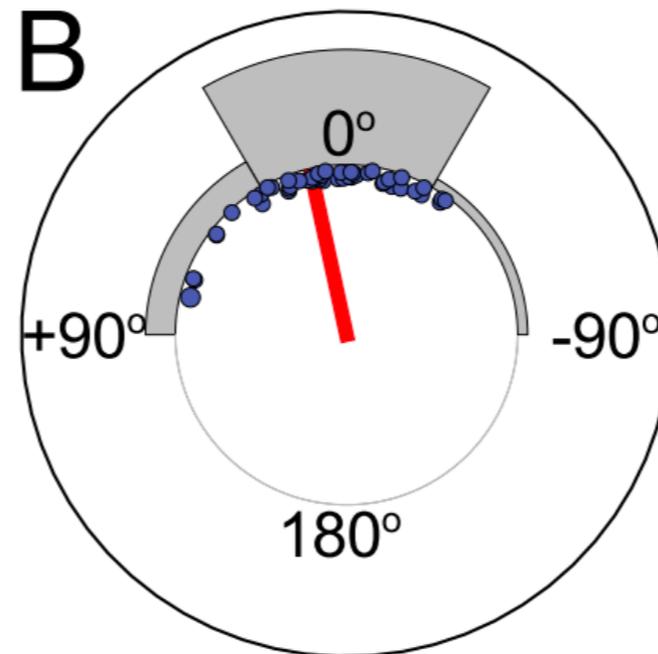
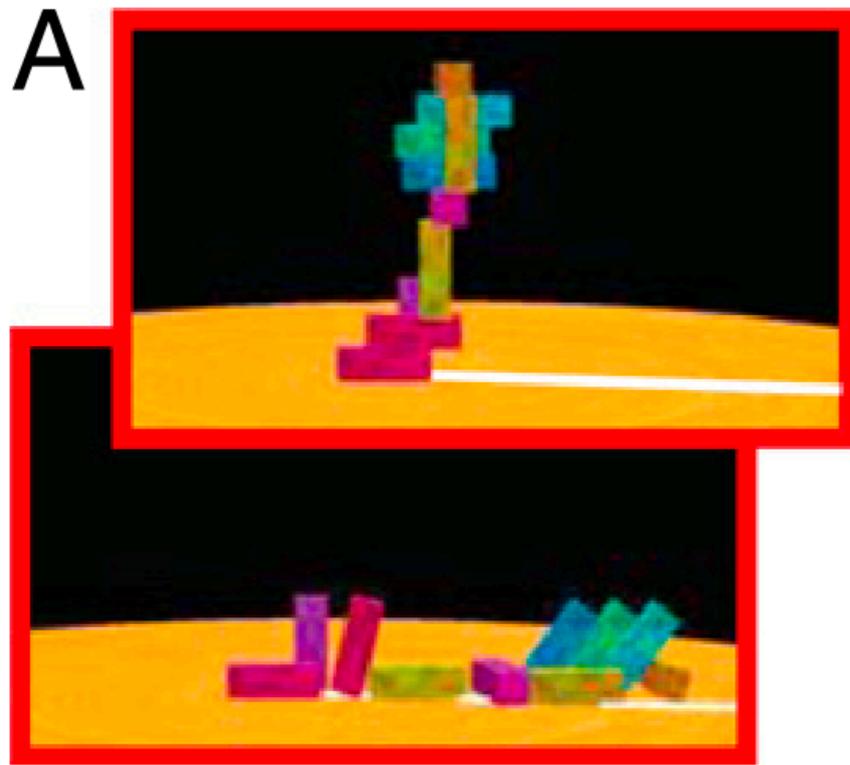




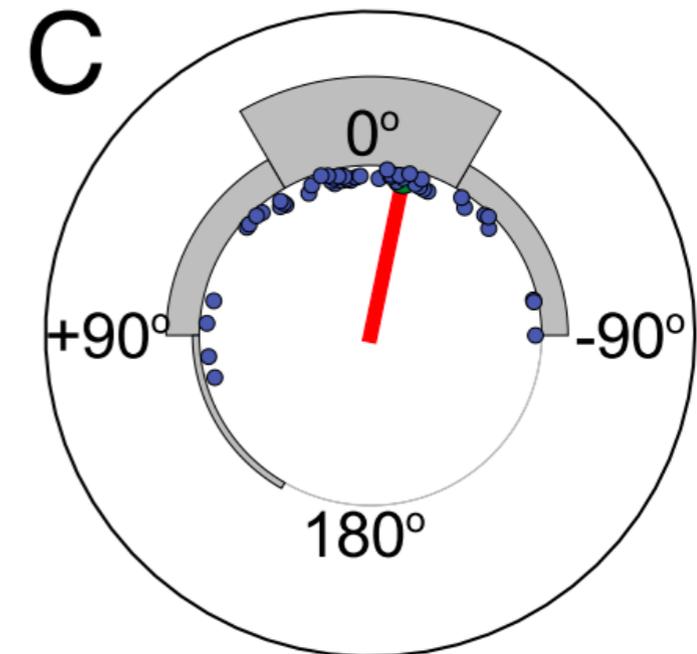
PHYSICAL ILLUSIONS



WHICH DIRECTION?

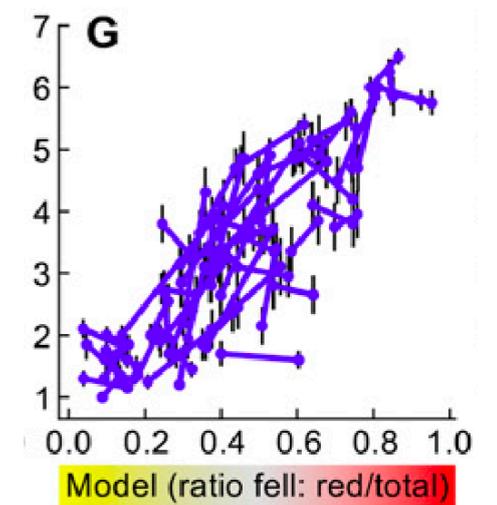
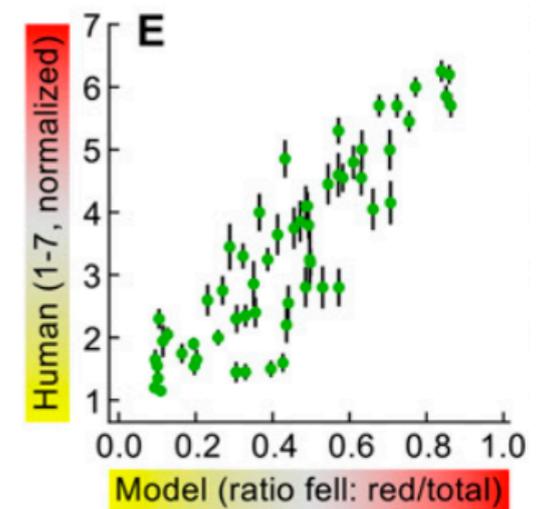
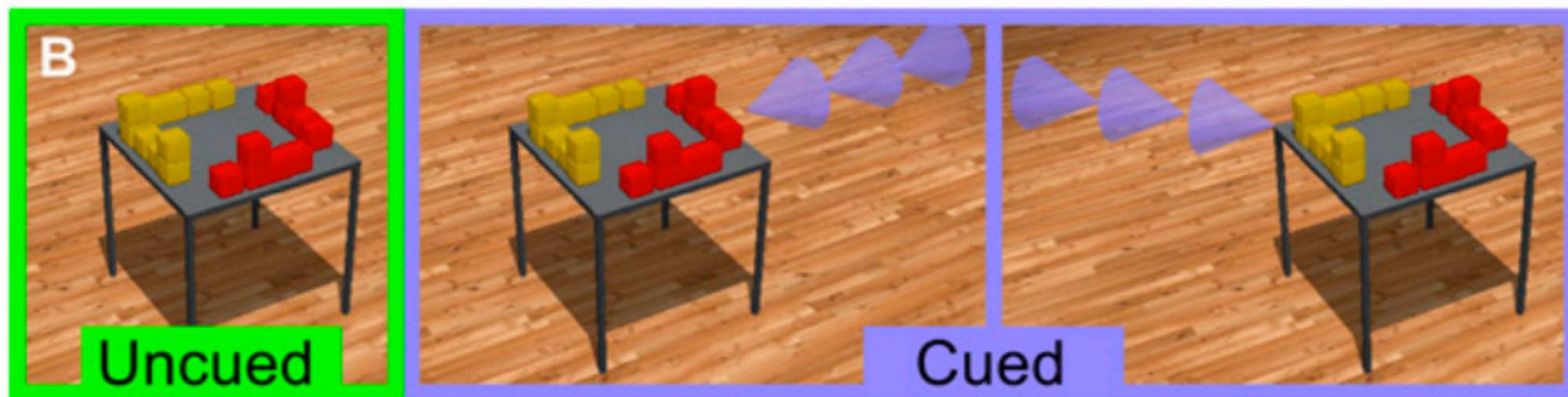
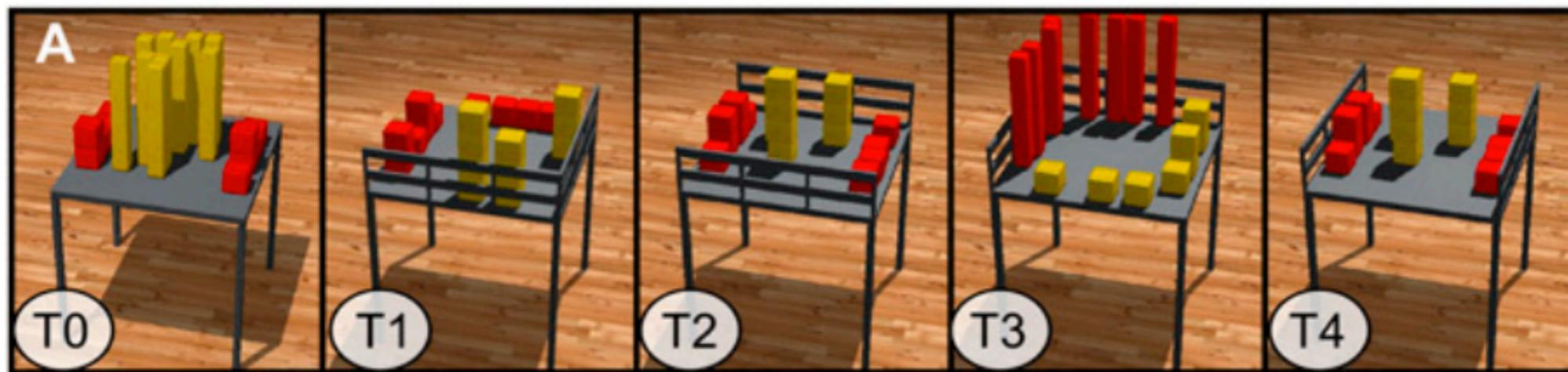


Difference between
model & human



Difference between
model & human

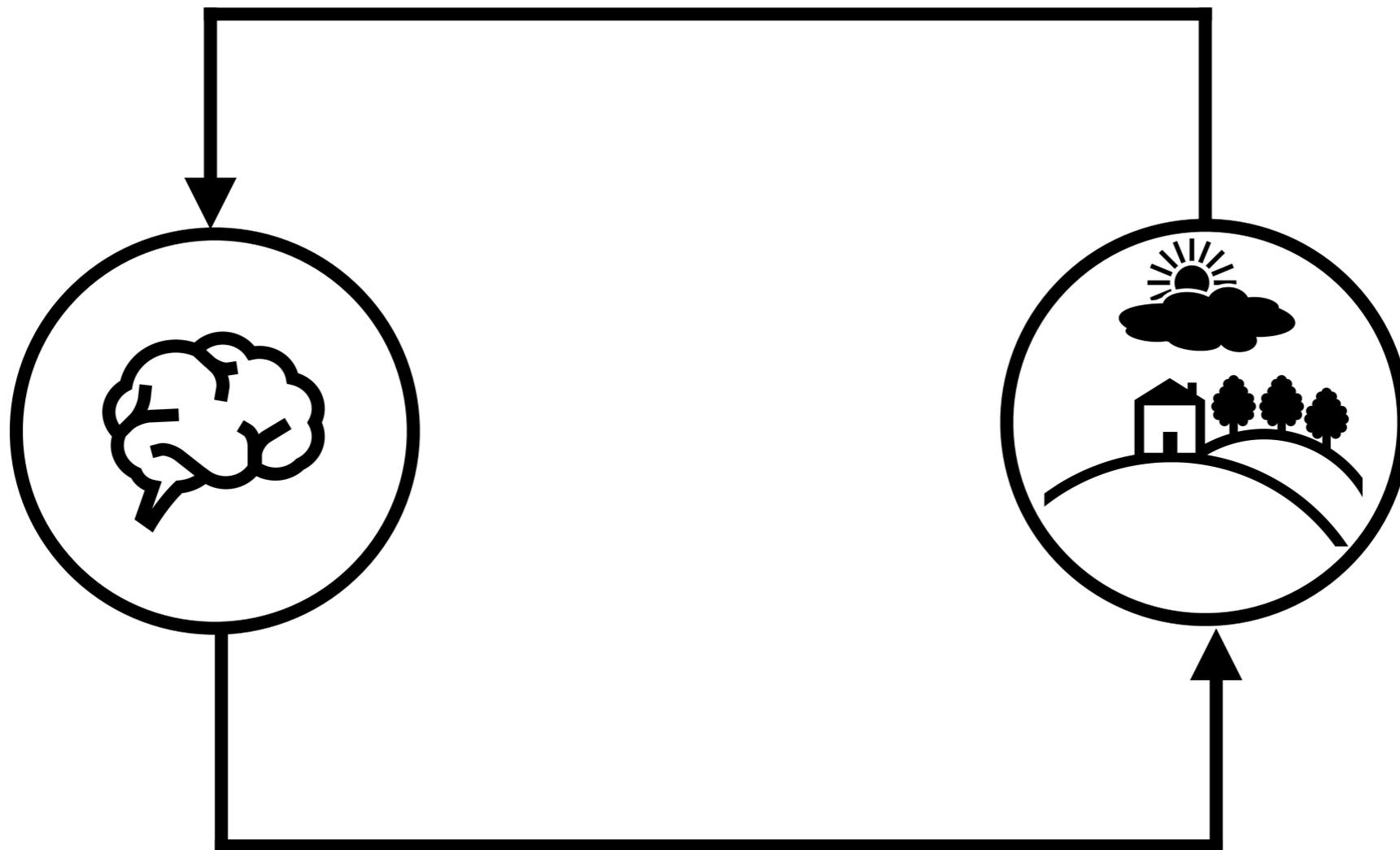
VARYING OBSTACLES, FORCES



ÖSSZEFOGLALÁS

- ▶ Bizonytalanság, ambiguitás miatt normatív feltételezés, hogy a valószínűségszámításra van szükség
- ▶ Feltételezzük, hogy az emberi idegrendszer evolúciósan úgy fejlődött, hogy képes legyen a bayesi inferenciához közel egyenértékű számításokat végezni
- ▶ Láttunk empirikus példákat arra hogy ez megvalósul,
 - ▶ de nyilvánvalóan nem minden feladatban fogják az emberek optimálisan integrálni a rendelkezésre álló információt, olyan feladatokban van erre esély ahol az evolúció erre rákényszerítette

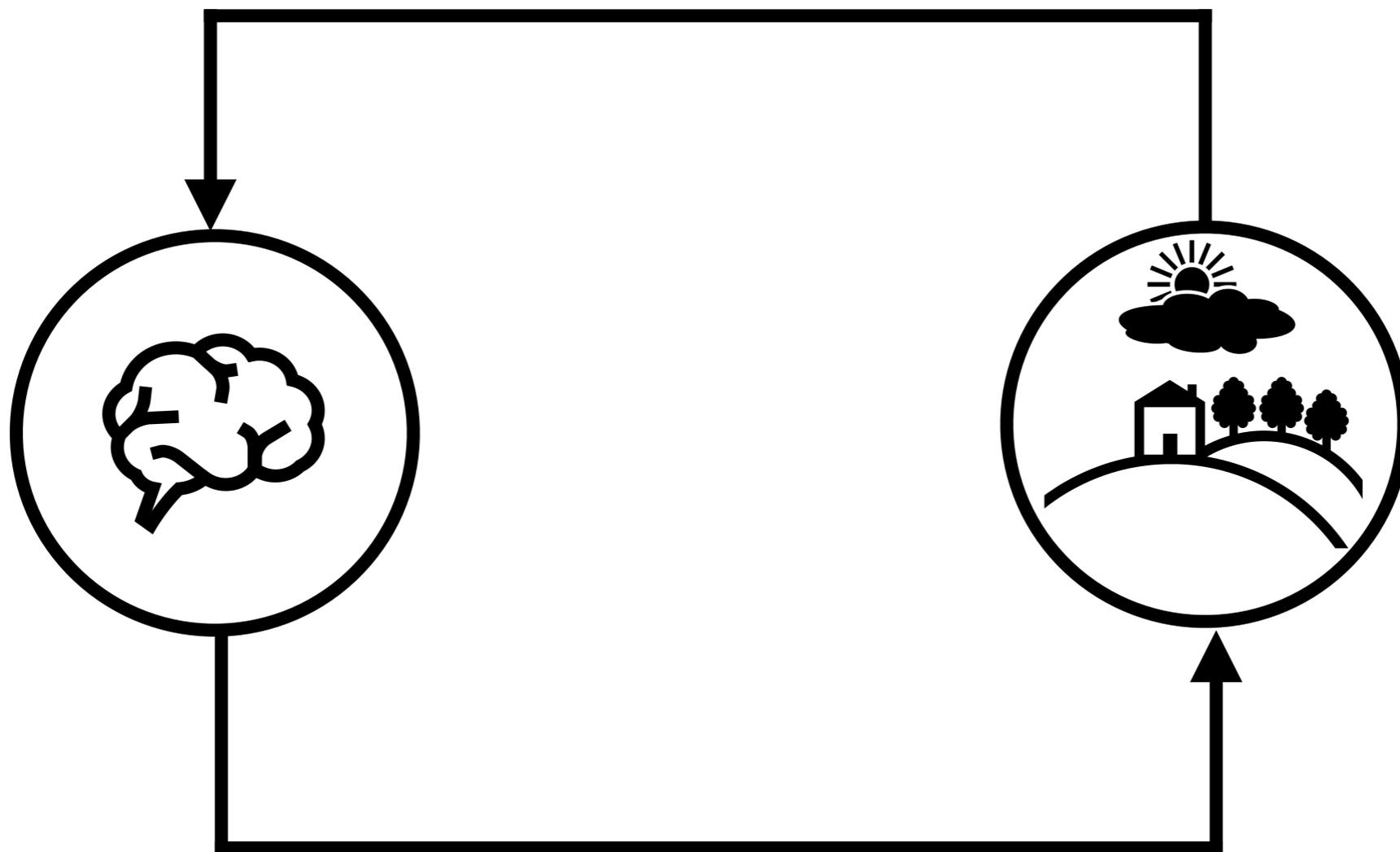
Percepció



Döntéshozás

Percepció

$$P(h|o)$$



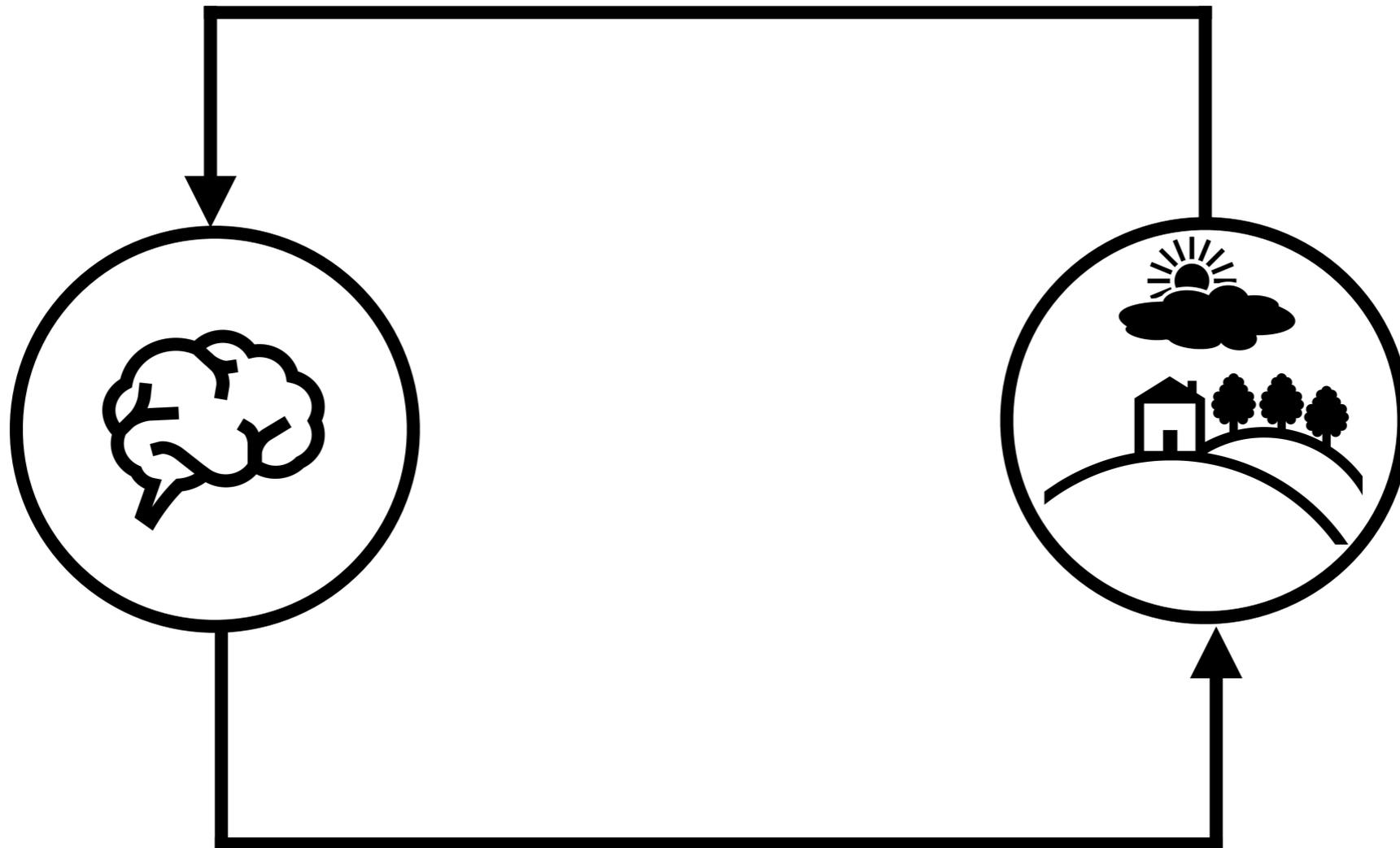
Döntéshozás

Percepció

$$P(o|h)P(h)$$

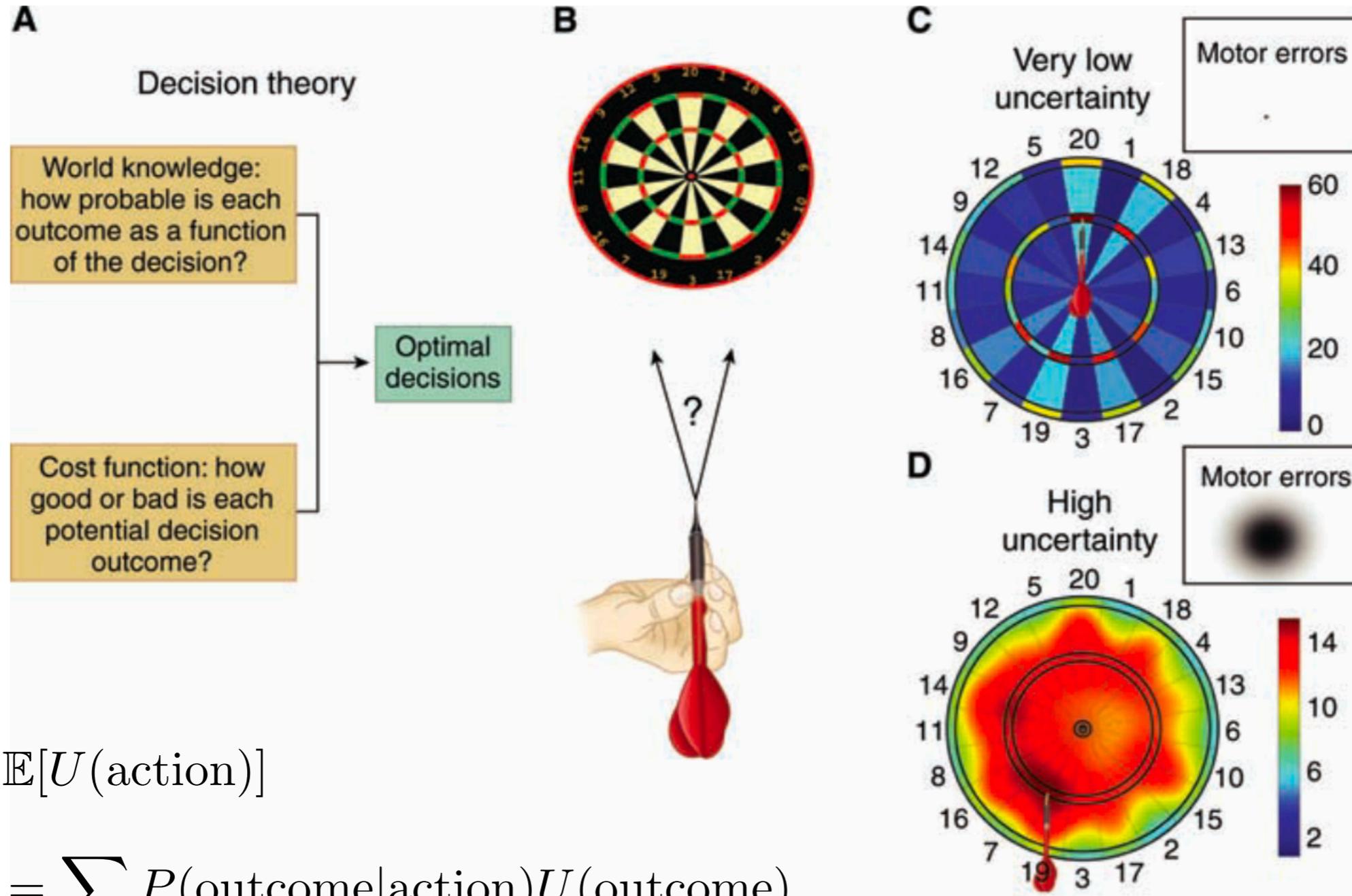


$$P(h|o)$$

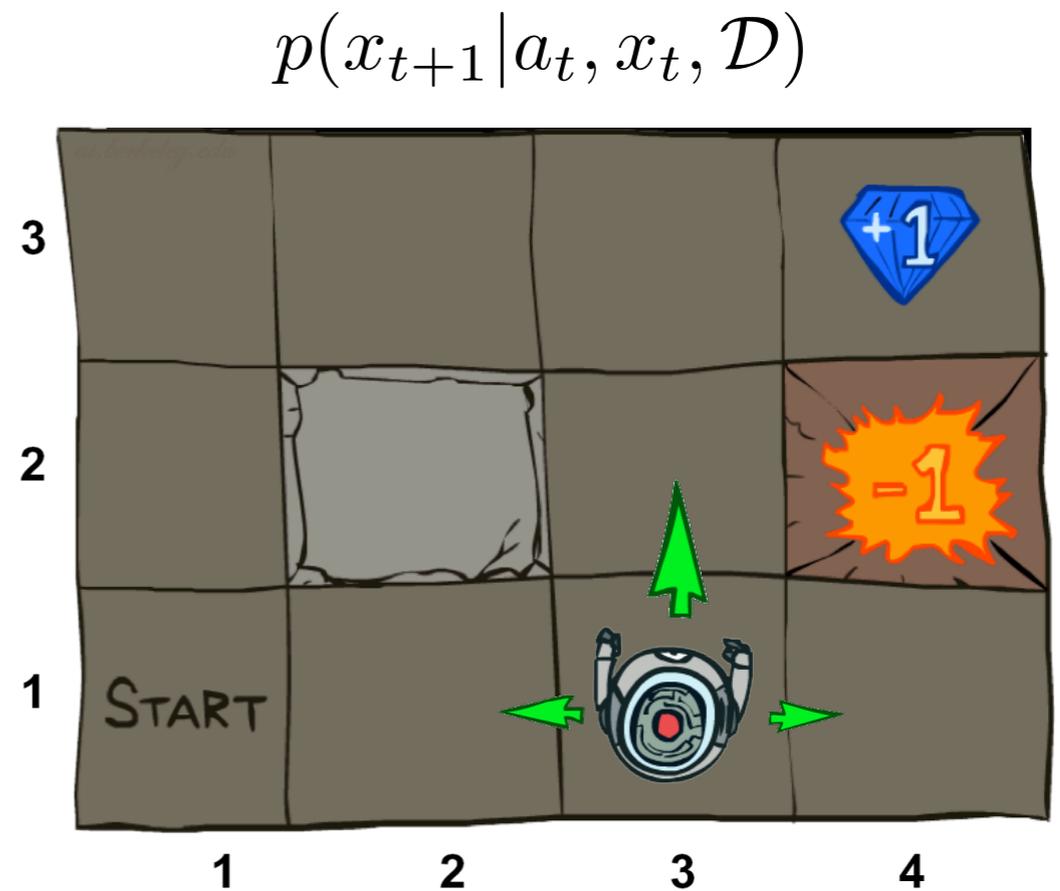
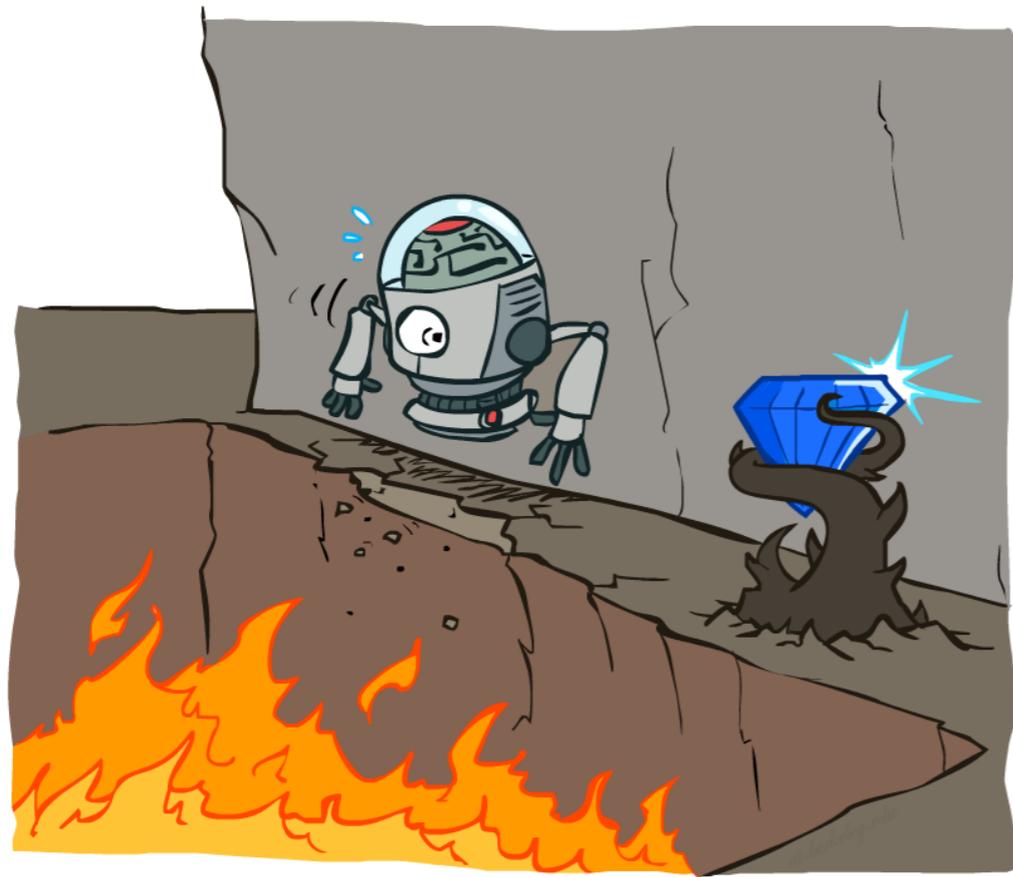


Döntéshozás

DECISION THEORY



DECISION THEORY



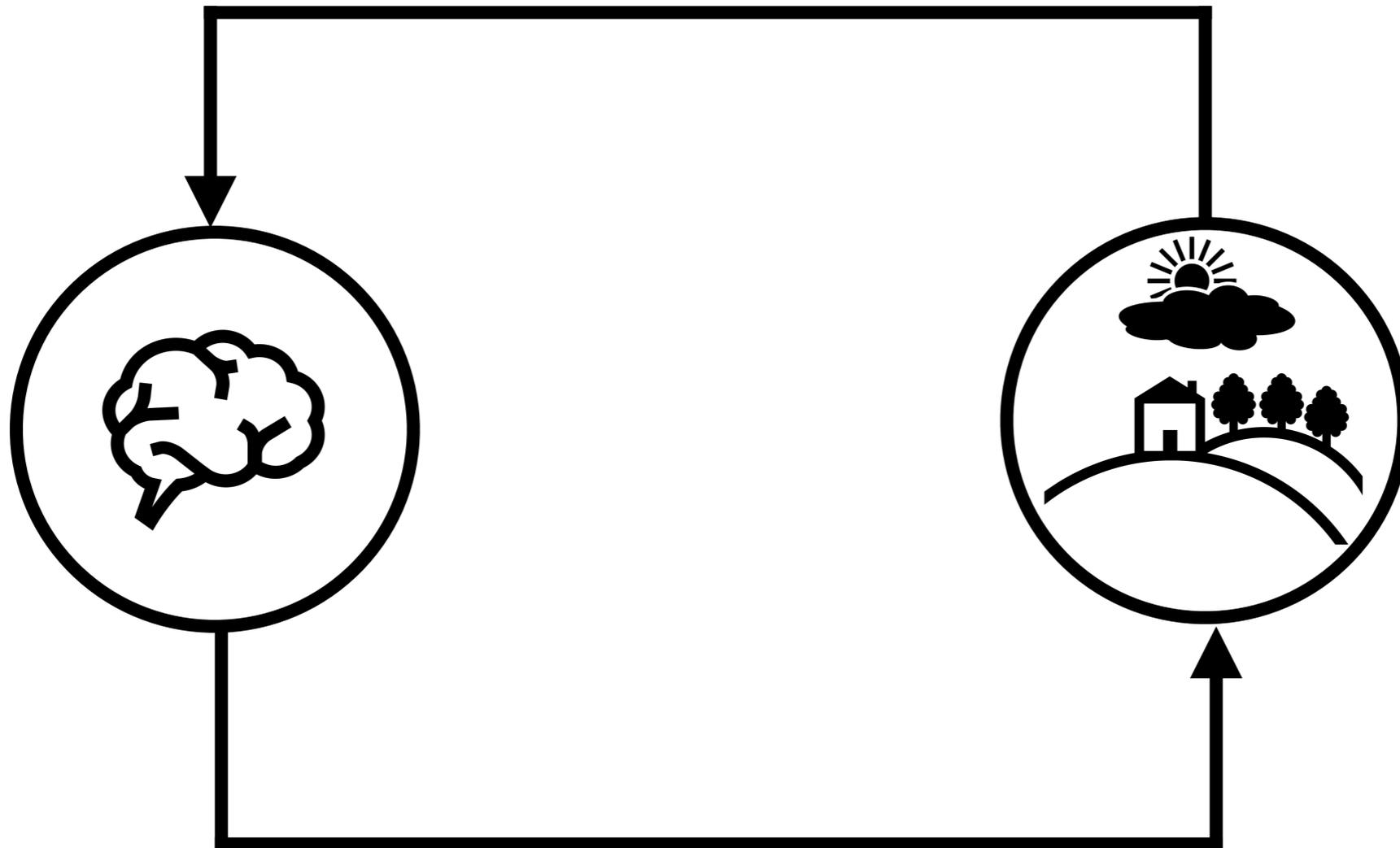
$$\sum P(\text{outcome} | \text{action}) U(\text{outcome})$$

Percepció

$$P(o|h)P(h)$$



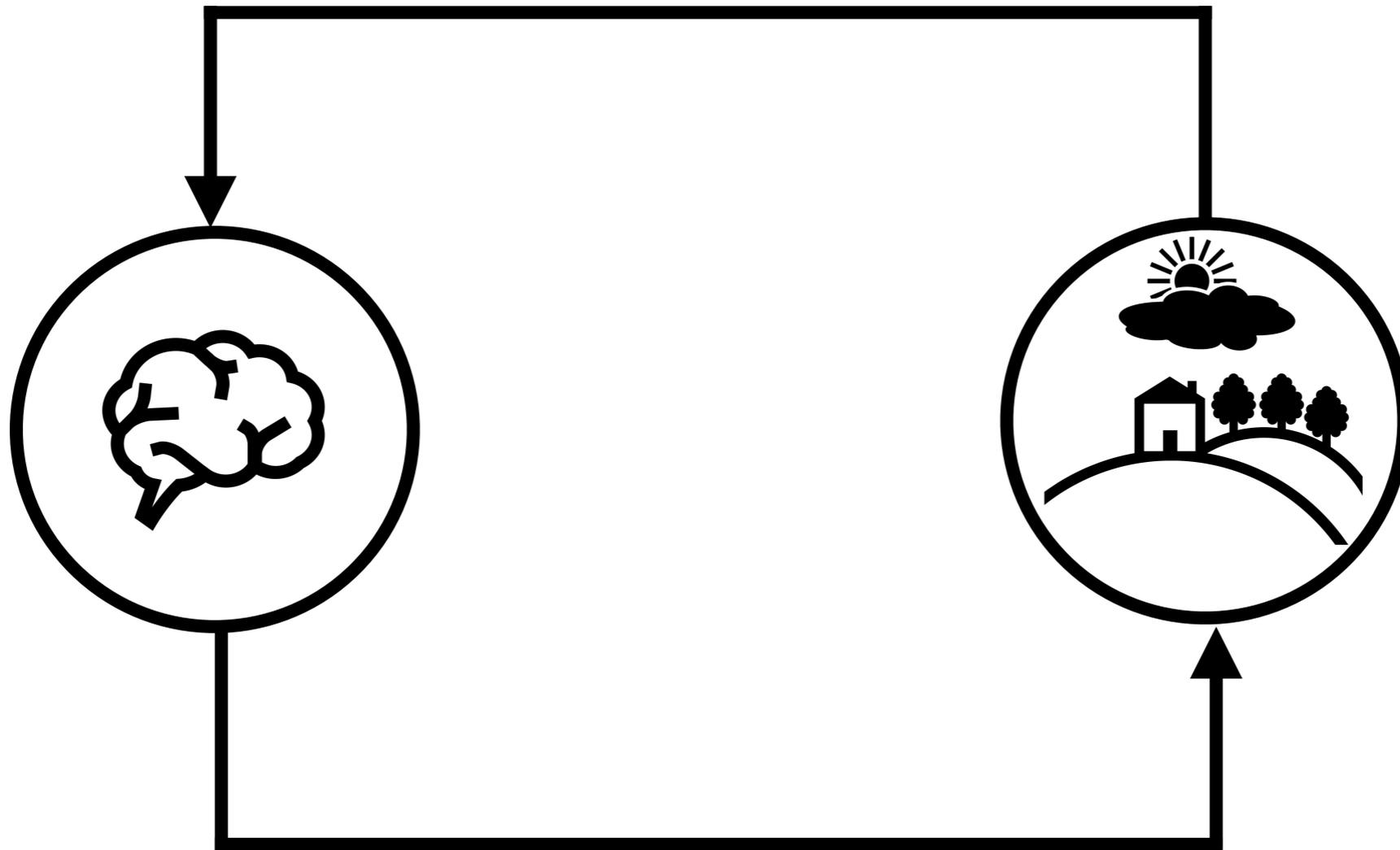
$$P(h|o)$$



Döntéshozás

Percepció

$$P(o|h)P(h) \longrightarrow P(h|o)$$

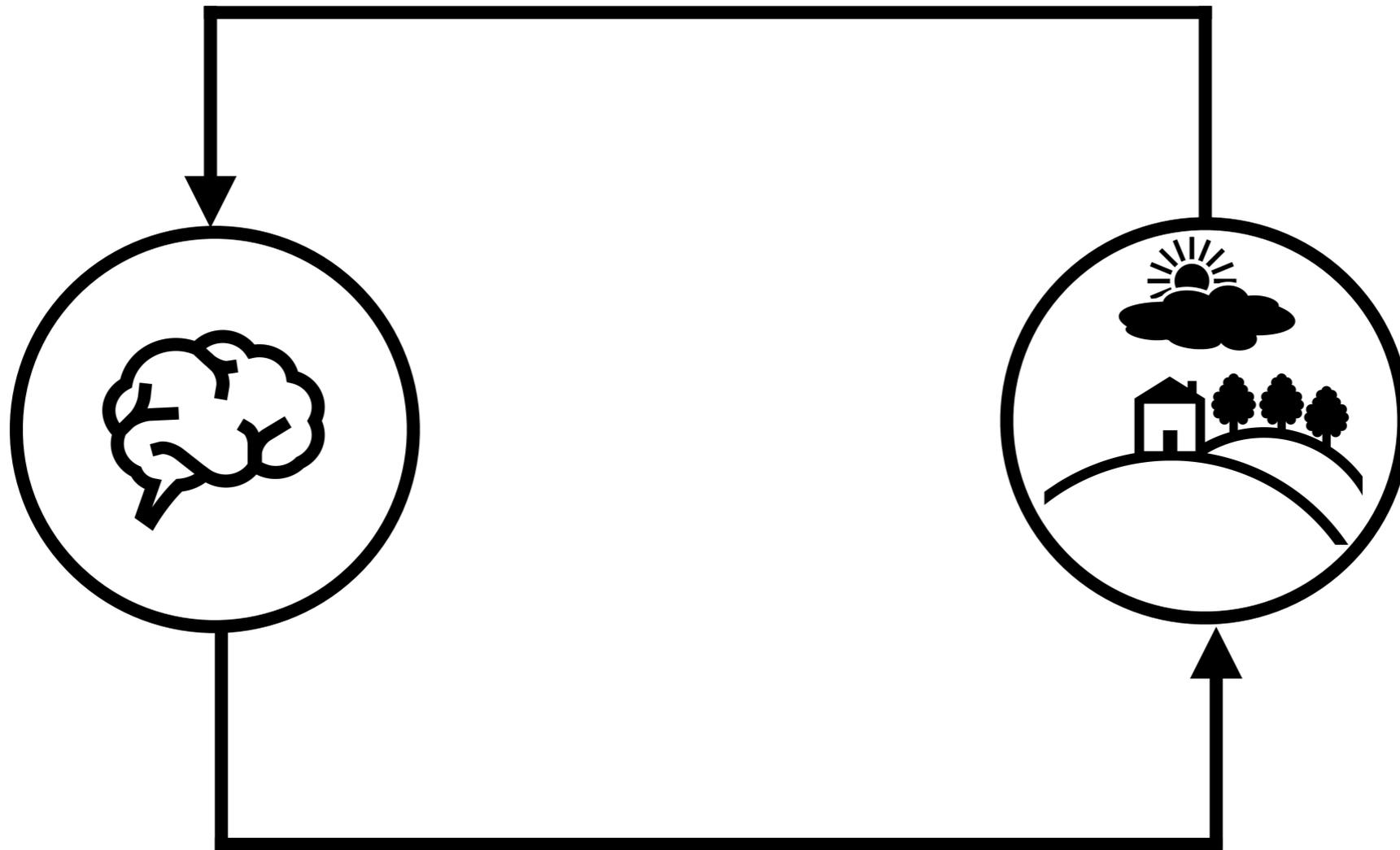


$$\mathbb{E}[U(\text{action})]$$

Döntéshozás

Percepció

$$P(o|h)P(h) \longrightarrow P(h|o)$$



$$\sum P(\text{outcome}|\text{action})U(\text{outcome}) \longrightarrow \mathbb{E}[U(\text{action})]$$

Döntéshozás

VISELKEDÉS

▶ Világ reprezentációja: $P(h, o)$

h hipotézis

o megfigyelés (observation)

VISELKEDÉS

- ▶ Világ reprezentációja: $P(h, o)$ és $P(h' | h, a)$
 a cselekvés (action)

VISELKEDÉS

- ▶ Világ reprezentációja: $P(h, o)$ és $P(h' | h, a)$
- ▶ Érték függvény: $V(h) = -L(h)$

VISELKEDÉS

- ▶ Világ reprezentációja: $P(h, o)$ és $P(h' | h, a)$
- ▶ Érték függvény: $V(h) = -L(h)$
- ▶ Döntés: $opt_a f(V, P(h' | h, a), P(h))$

VISELKEDÉS

▶ Világ reprezentációja: $P(h, o)$ és $P(h' | h, a)$

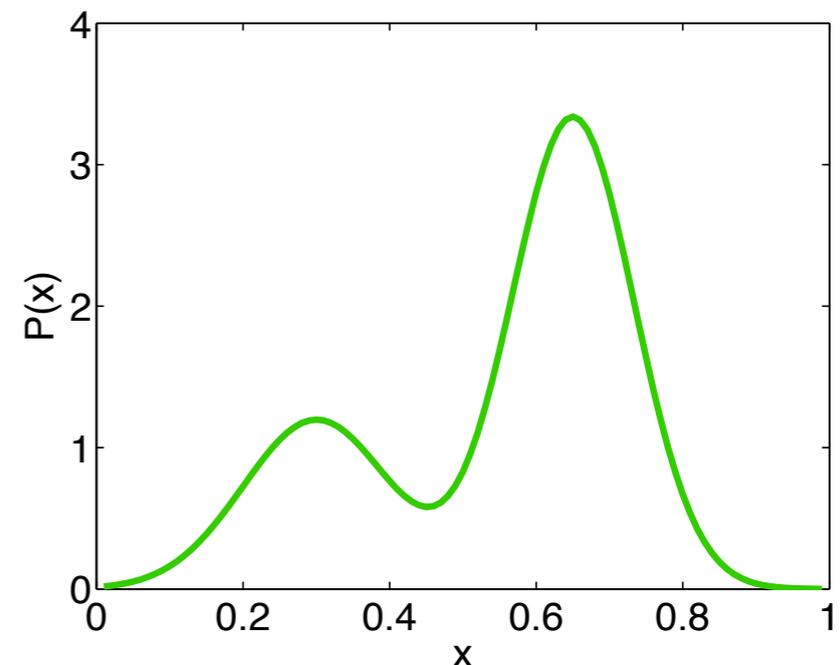
▶ Érték függvény: $V(h) = -L(h)$

▶ Döntés: $opt_a f(V, P(h' | h, a), P(h))$

pl: $\hat{a} = argmax \left(\sum_{h, h'} V(h') P(h' | h, a) P(h) \right)$

- ▶ Hogyan határozza meg a költségfüggvény a döntésünket?
- ▶ Speciális eset: a döntés ugyanabban a térben születik, mint az inferencia, ekkor a döntés eredménye egy speciális \hat{x} kiválasztása

- ▶ Hogyan határozza meg a költségfüggvény a döntésünket?
- ▶ Speciális eset: a döntés ugyanabban a térben születik, mint az inferencia, ekkor a döntés eredménye egy speciális \hat{x} kiválasztása

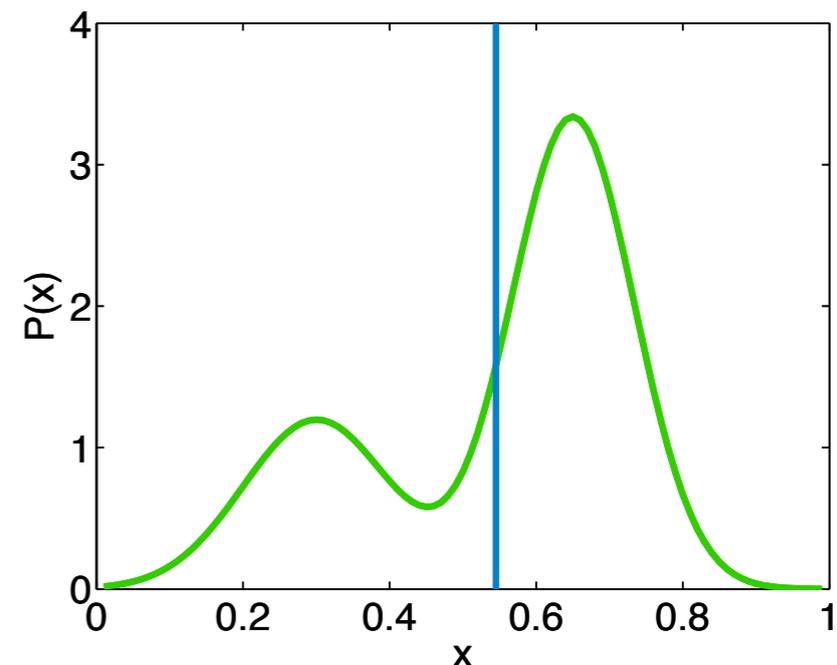


- ▶ Hogyan határozza meg a költségfüggvény a döntésünket?
- ▶ Speciális eset: a döntés ugyanabban a térben születik, mint az inferencia, ekkor a döntés eredménye egy speciális \hat{x} kiválasztása

$$L(\hat{x}, x) = (\hat{x} - x)^2$$

$$\longrightarrow \hat{x} = \sum_x x P(x)$$

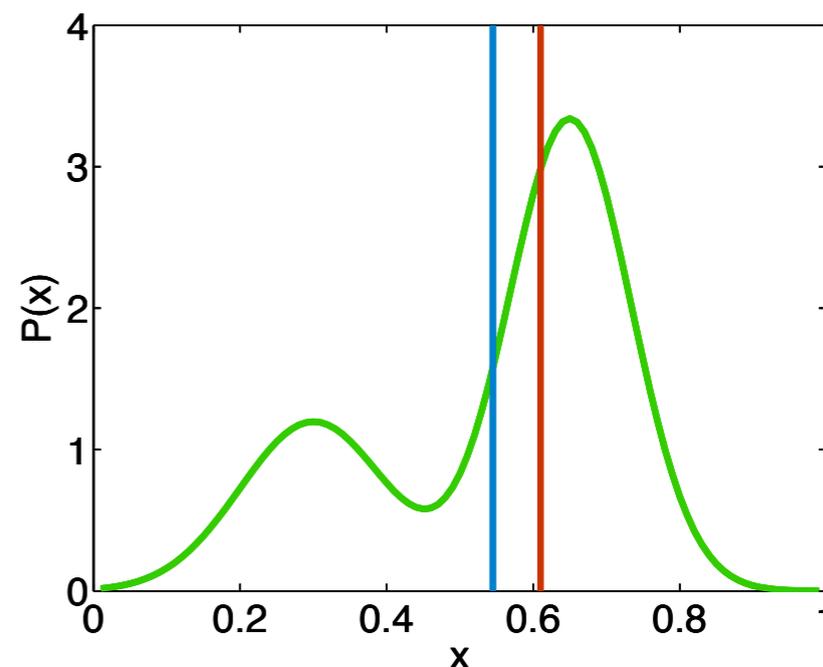
posterior mean



- ▶ Hogyan határozza meg a költségfüggvény a döntésünket?
- ▶ Speciális eset: a döntés ugyanabban a térben születik, mint az inferencia, ekkor a döntés eredménye egy speciális \hat{x} kiválasztása

$$L(\hat{x}, x) = (\hat{x} - x)^2 \quad \longrightarrow \quad \hat{x} = \sum_x x P(x) \quad \text{posterior mean}$$

$$L(\hat{x}, x) = |\hat{x} - x| \quad \longrightarrow \quad \sum_{x=-\infty}^{\hat{x}} P(x) = \frac{1}{2} \quad \text{posterior median}$$

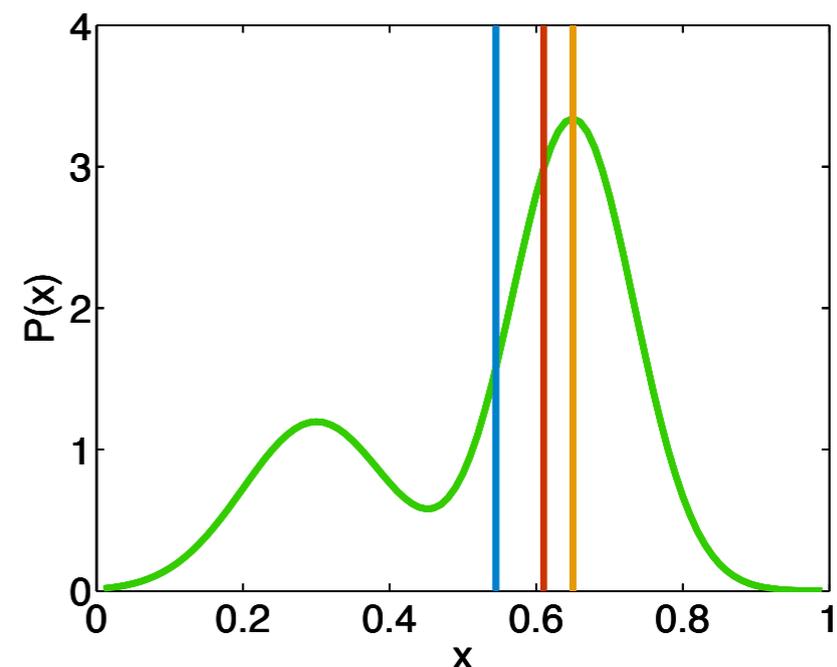


- ▶ Hogyan határozza meg a költségfüggvény a döntésünket?
- ▶ Speciális eset: a döntés ugyanabban a térben születik, mint az inferencia, ekkor a döntés eredménye egy speciális \hat{x} kiválasztása

$$L(\hat{x}, x) = (\hat{x} - x)^2 \quad \longrightarrow \quad \hat{x} = \sum_x x P(x) \quad \text{posterior mean}$$

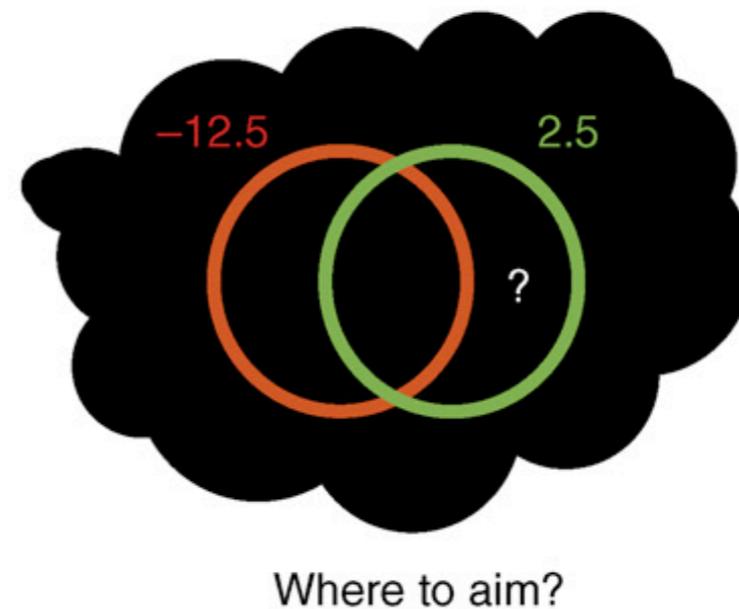
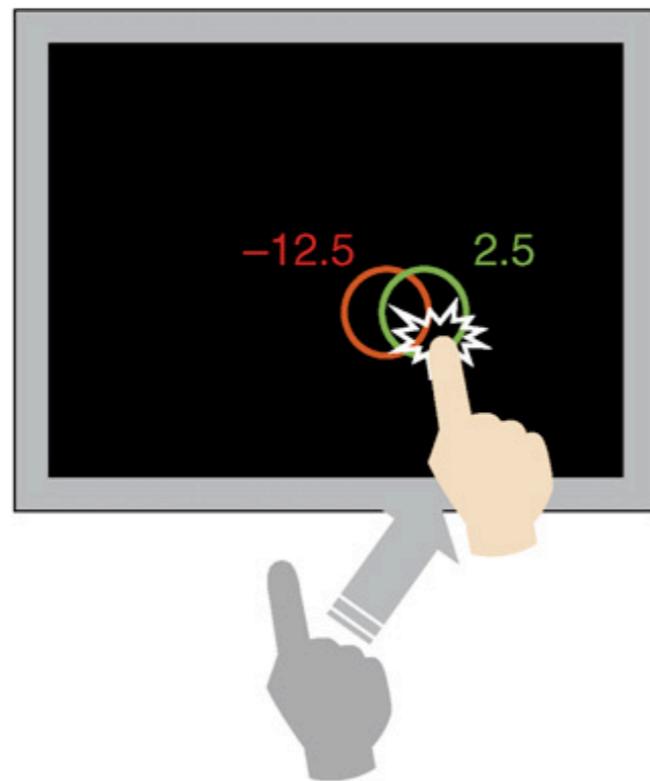
$$L(\hat{x}, x) = |\hat{x} - x| \quad \longrightarrow \quad \sum_{x=-\infty}^{\hat{x}} P(x) = \frac{1}{2} \quad \text{posterior median}$$

$$L(\hat{x}, x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x = \hat{x} \\ -1 & \text{otherwise} \end{cases} \quad \longrightarrow \quad \hat{x} = \operatorname{argmax}_x P(x) \quad \text{maximum a posteriori (MAP)}$$

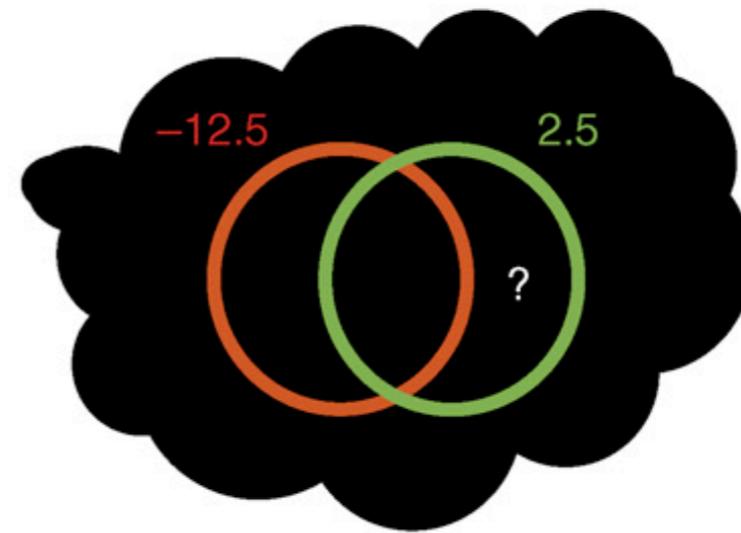


OPTIMÁLIS DÖNTÉSEK EMBEREKKNÉL

- ▶ Motoros/szenzoros zaj
- ▶ Kísérletben kontrollált költségfüggvény

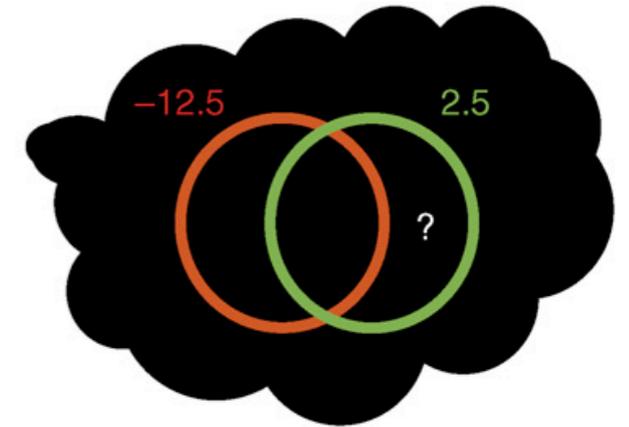


OPTIMÁLIS DÖNTÉSEK EMBEREKNÉL



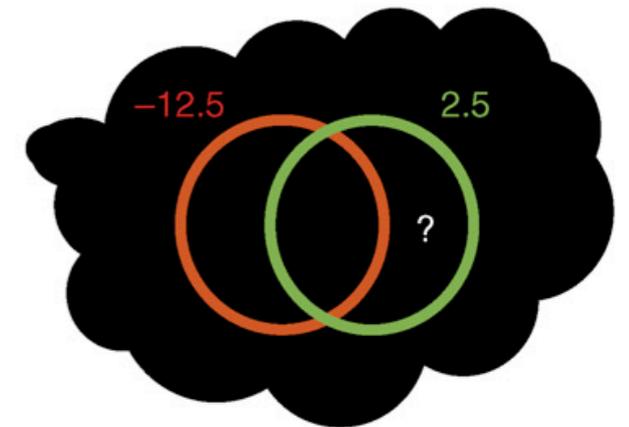
Where to aim?

OPTIMÁLIS DÖNTÉSEK EMBEREKNÉL



Where to aim?

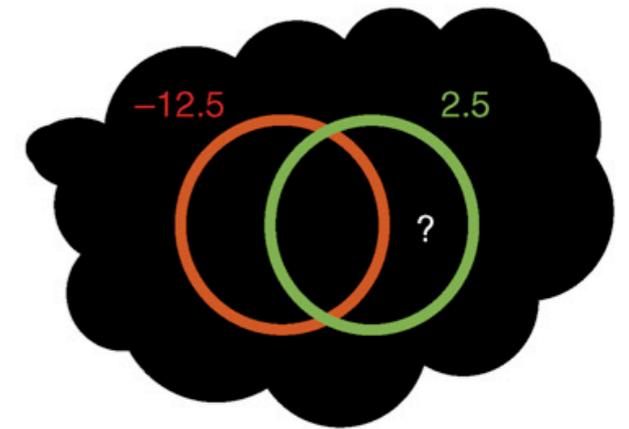
OPTIMÁLIS DÖNTÉSEK EMBEREKNÉL



Where to aim?

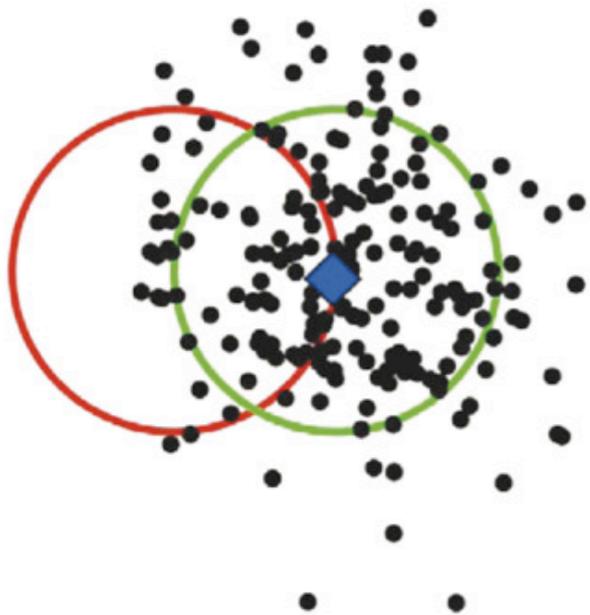
Adott mértékű motor-zajt feltételezve

OPTIMÁLIS DÖNTÉSEK EMBEREKNÉL

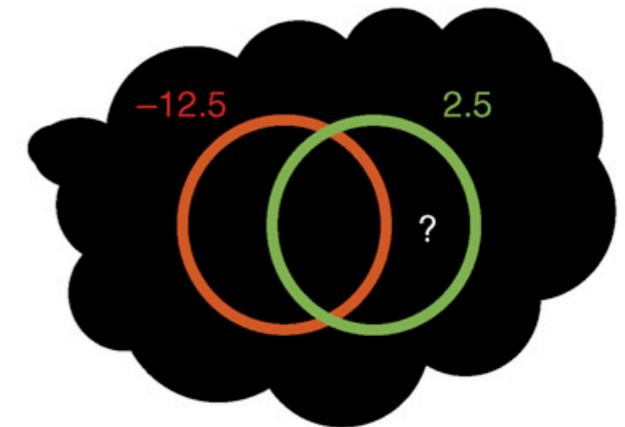


Where to aim?

Adott mértékű motor-zajt feltételezve

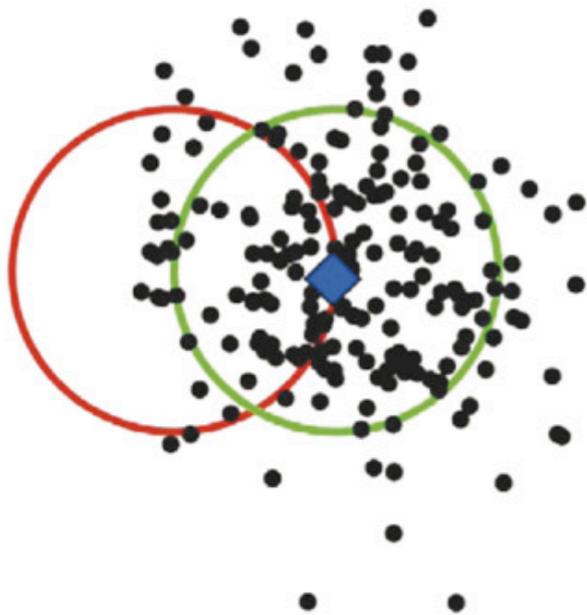


OPTIMÁLIS DÖNTÉSEK EMBEREKNÉL



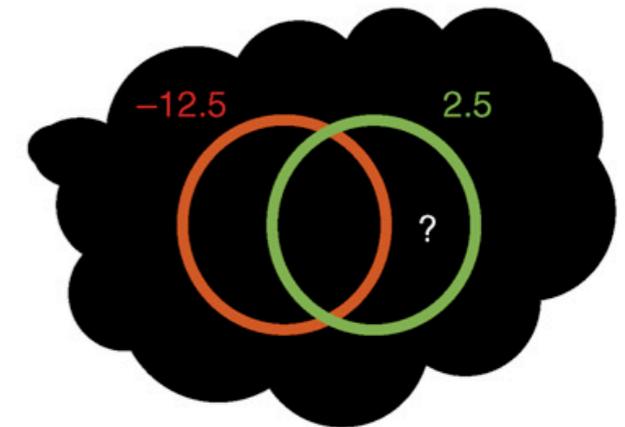
Where to aim?

Adott mértékű motor-zajt feltételezve



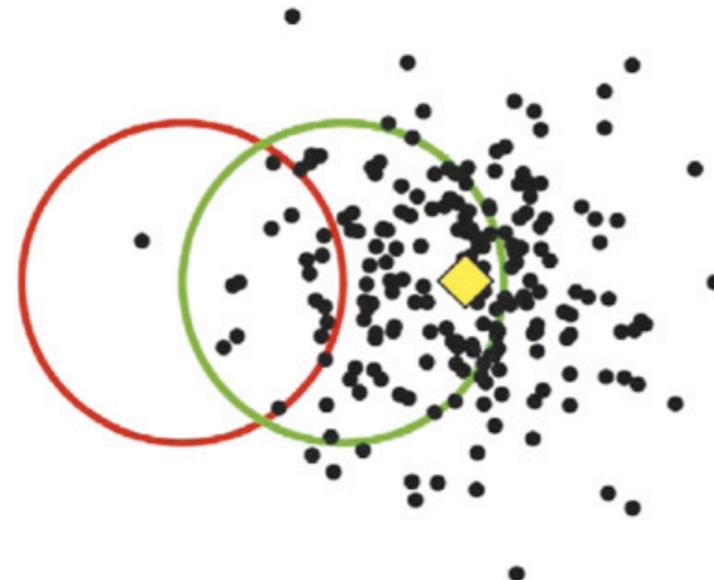
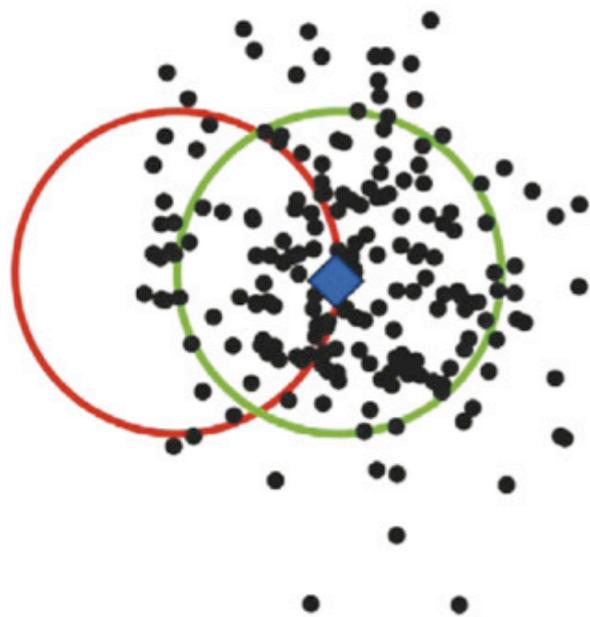
0.43, 2.5 cents
0.29, -10 cents
0.07, -12.5 cents
0.21, 0 cents

OPTIMÁLIS DÖNTÉSEK EMBEREKNÉL



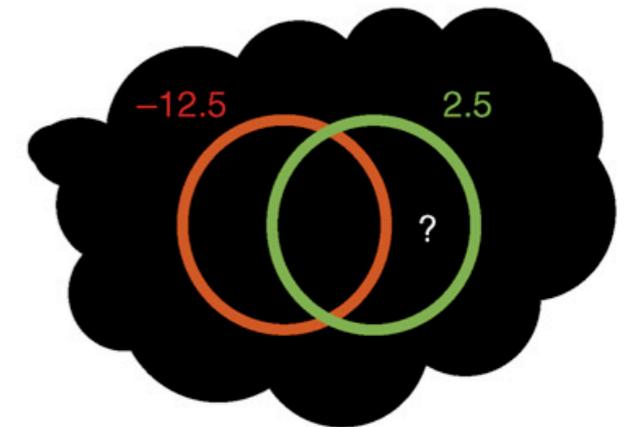
Where to aim?

Adott mértékű motor-zajt feltételezve



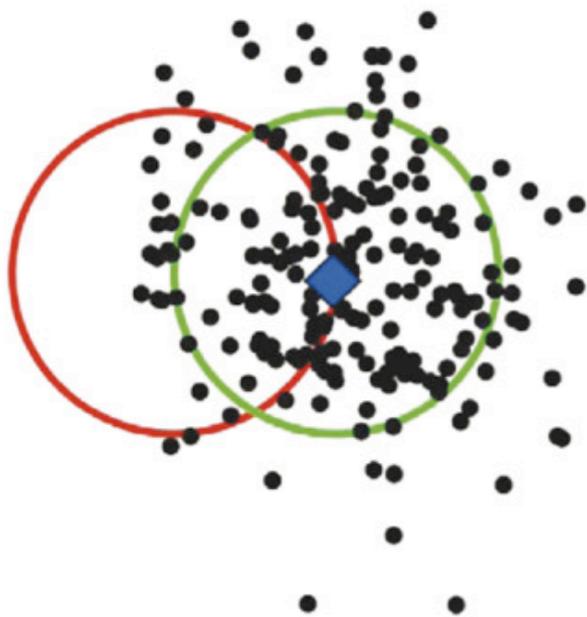
0.43, 2.5 cents
0.29, -10 cents
0.07, -12.5 cents
0.21, 0 cents

OPTIMÁLIS DÖNTÉSEK EMBEREKNE

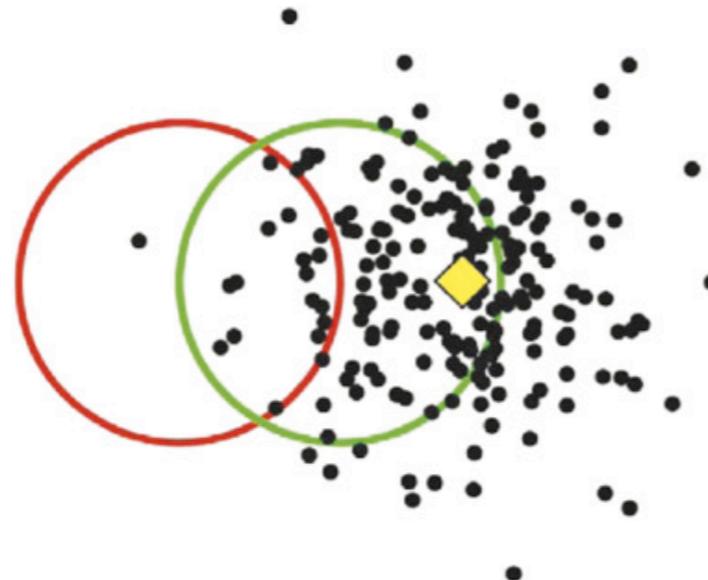


Where to aim?

Adott mértékű motor-zajt feltételezve

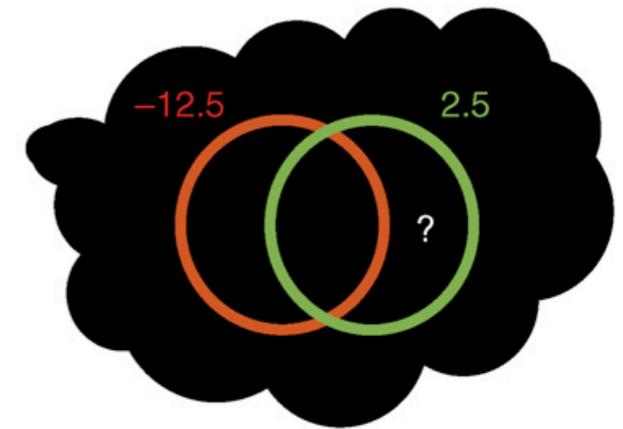


0.43, 2.5 cents
0.29, -10 cents
0.07, -12.5 cents
0.21, 0 cents



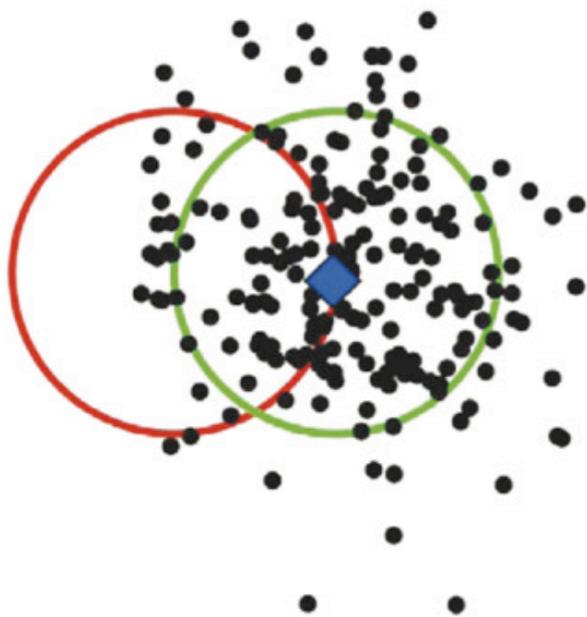
0.32, 2.5 cents
0.03, -10 cents
<0.01, -12.5 cents
0.65, 0 cents

OPTIMÁLIS DÖNTÉSEK EMBEREKNÉL

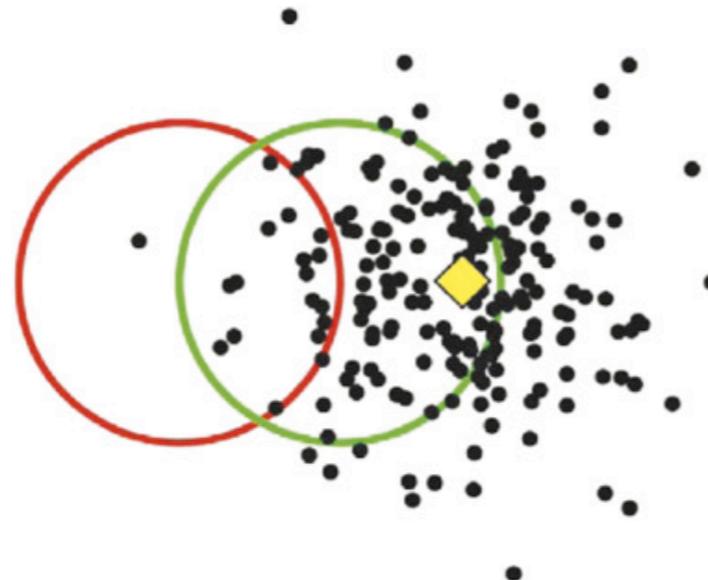


Where to aim?

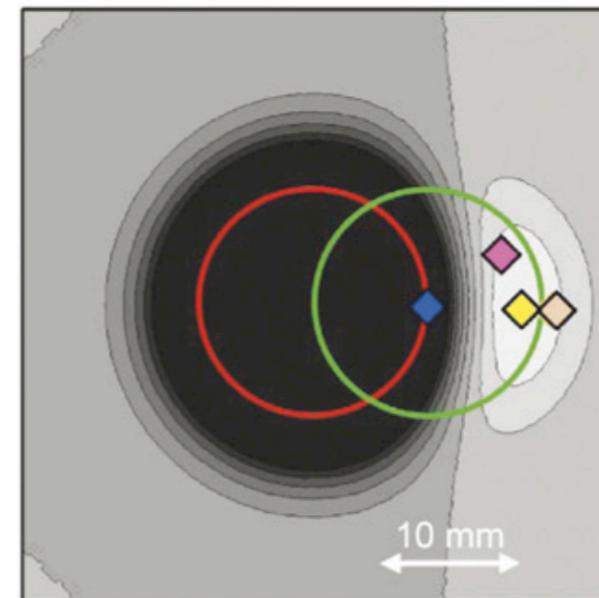
Adott mértékű motor-zajt feltételezve



0.43, 2.5 cents
0.29, -10 cents
0.07, -12.5 cents
0.21, 0 cents

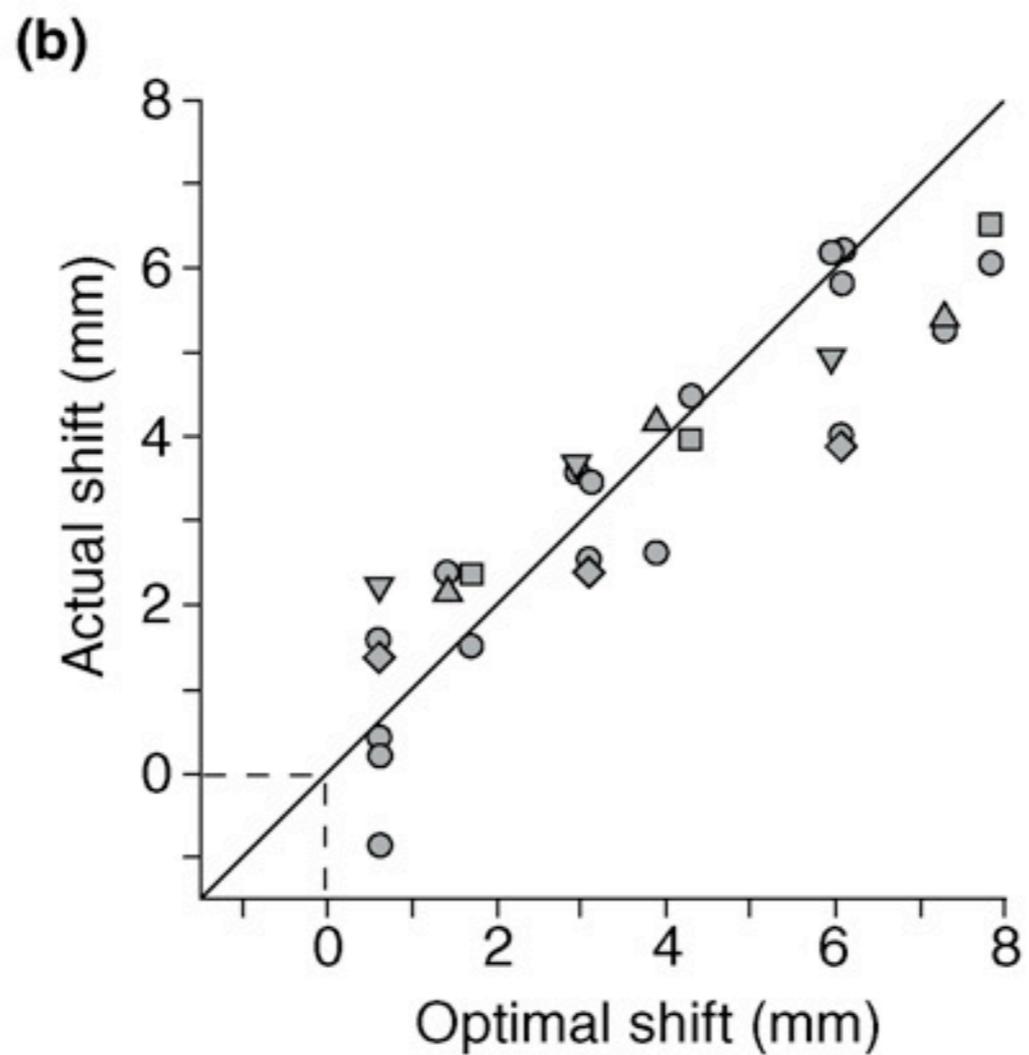


0.32, 2.5 cents
0.03, -10 cents
<0.01, -12.5 cents
0.65, 0 cents



- ◆ 0.78 cents per trial
- ◆ 0.64 cents per trial
- ◆ 0.57 cents per trial
- ◆ -2.8 cents per trial

OPTIMÁLIS DÖNTÉSEK EMBEREKNÉL



HÁZI FELADAT

- ▶ 1. Cue integration: lássuk be, használva a Bayes szabályt és a megadott prior és likelihood függvényeket, hogy a látens (s) posteriorja Gauss a következő paraméterekkel:
(Keressük ki a Gauss eloszlás sűrűségfüggvényét és használjuk a Bayes-i inferencia szabályait: posterior \sim prior * likelihood).

$$\hat{\mu} = \frac{\frac{X_v}{\sigma_v^2} + \frac{X_h}{\sigma_h^2}}{\frac{1}{\sigma_h^2} + \frac{1}{\sigma_v^2}} \quad \frac{1}{\hat{\sigma}^2} = \frac{1}{\sigma_h^2} + \frac{1}{\sigma_v^2}$$

- ▶ 2. Ernst&Banks: Cue integration:
 - ▶ Miért nem kellett számolnunk a priorral?
 - ▶ Milyen forrásokból jöhet zaj a csak haptikus esetben?

CIKKEK I.

- ▶ David M. Coppola, Harriett R. Purves, Allison N. McCoy, and Dale Purves. (1998). The distribution of oriented contours in the real world. PNAS 95 (7) 4002-4006
<http://www.pnas.org/content/95/7/4002.abstract>
- ▶ Deep Ganguli and Eero P. Simoncelli (2010). Implicit encoding of prior probabilities in optimal neural populations
<http://www.cns.nyu.edu/pub/lcv/ganguli10c-preprint.pdf>
- ▶ Xue-Xin Wei and Alan A. Stocker. (2012). Efficient coding provides a direct link between prior and likelihood in perceptual Bayesian inference.
<https://papers.nips.cc/paper/4489-efficient-coding-provides-a-direct-link-between-prior-and-likelihood-in-perceptual-bayesian-inference.pdf>
- ▶ Marc O. Ernst* & Martin S. Banks (2002). Humans integrate visual and haptic information in a statistically optimal fashion
<http://www.cns.nyu.edu/~david/courses/perceptionGrad/Readings/ErnstBanks-Nature2002.pdf>

CIKKEK II.

- ▶ Konrad P. Körding & Daniel M. Wolpert (2004). Bayesian integration in sensorimotor learning.
http://klab.smp.northwestern.edu/wiki/images/2/28/Kording_Bayes_integrate_sensorimotor_learn_2004.pdf
(2. Házi feladat)
- ▶ Thomas L. Griffiths & Joshua B. Tenenbaum (2006). Optimal Predictions in Everyday Cognition.
<http://cocosci.berkeley.edu/tom/papers/predictions.pdf>
- ▶ Trommershäuser J, Maloney LT, Landy MS (2008). Decision making, movement planning and statistical decision theory.